TRABAJO PRACTICO 2 : MODELOS ANALITICOS DE FENOMENOS ALEATORIOS

Problema 1

Un contratista prepara licitaciones por tres trabajos A, B y C. Las probabilidades de que gane cada uno de los tres trabajos son P(A) = 0.50 , P(B) = 0.80 y P(C) = 0.20 respectivamente. Asumir que los eventos A, B y C son estadísticamente independientes. Siendo X el numero total de trabajos que el contratista ganara,

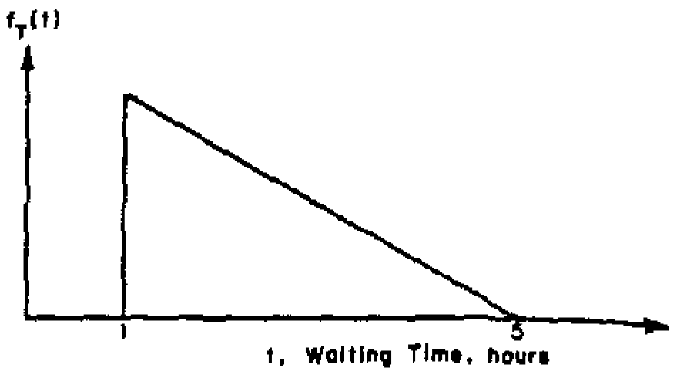
a) Cuáles son los posibles valores de X ? Calcular y graficar la función de densidad de la variable aleatoria X
b) Graficar la función de distribución de X.
c) Determinar $\mathbf{P}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{2}$
d) Determinar $\mathbf{P}(\mathbf{0} < \mathbf{X} \leq \mathbf{2})$

Problema 2

Los tiempos de espera en el aeropuerto A de la ciudad B tienen una función de densidad mostrada en la siguiente figura. El tiempo de espera se mide desde el momento que el pasajero entra a la terminal hasta el momento en que está en el aire. El tiempo consumido en el trayecto desde el hotel C hasta el aeropuerto depende del tipo de transporte y se asume que es 0.75, 1.00 y 1.25 horas corespondientes a los viajes por via de transito rápida, taxi y limousine respectivamente. Las probabilidades de que un pasajero tome cada modo de transporte son las siguientes :

P(vía rápida) = 0.30
P(taxi) = 0.40
P(limousine) = 0.30

a) Cuál es la probabilidad de que un pasajero esté en el aire en al menos 3 horas después de dejar el hotel C ?
b) Sabiendo que el pasajero está en el aire dentro de las 3 horas, cuál es la probabilidad de que haya tomado la limousine ?



Función de distribución de los tiempos de espera

Problema 3

La resistencia lateral de un pórtico de un edificio pequeño es aleatoria con la función de densidad :

$$f_R(r) = \begin{cases} \left[f_R(r) = \dfrac{3}{500} \cdot [(r-10)\cdot(20-r)] \right] & \text{if } 10 \le r \le 20 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

a) Graficar la función de densidad $f_R(r)$ y la función de distribución $F_R(r)$

b) Determinar : El valor medio de R
La mediana de R
La moda de R
El desvío standard de R
El coeficiente de variación de R

Problema 4

El tiempo de retraso de un proyecto de construcción se describe con una variable aleatoria X. Supongamos que X es una variable discreta con una función de distribución dada por :

Función de distribución

x_i (dias)	$p_X(x_i)$
1	0.50
2	0.30
3	0.10
4	0.10

Función de penalidad

x_i (dias)	$g(x_i)$ ($100.000)
1	5
2	6
3	7
4	7

La penalidad por terminar el proyecto fuera de tiempo depende de la cantidad de días de retraso; esto se representa con la función $g(x_i)$.

a) Calcular la penalidad media para este proyecto.

b) Calcular el desvío standard de la penalidad.

Problema 5

El volumen de tráfico de un aeropuerto (dado por el número de despegues y aterrizajes) durante la hora pico es una distribución normal con una media de 200 y un desvío standard de 60 aviones.

a) Si la capacidad de la pista (para despegues y aterrizajes) es de 350 aviones por hora, cual es la probabilidad diaria de congestión de tráfico aéreo? Asumir que hay una sola hora pico por día.

b) Si no hay otros aeropuertos que se estén construyendo o expandiendo, caul es la probabilidad de congestión en 10 años ? Asumir que la media del trafico se incrementa en forma lineal 10% cada año y el coeficiente de variación permanece igual.

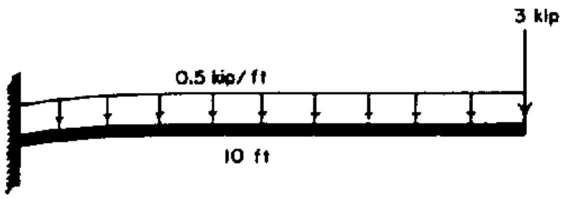
c) Si la predicción de crecimiento es correcta, que capacidad se requiere en el aeropuerto de 10 años hasta ahora para mantener la actual condición de servicio ? (Es decir que mantenga la misma probabilidad de congestion como ahora)

Problema 6

La capacidad de tomar momentos flexores M de la viga mostrada en la figura, es constante a lo largo de toda su longitud. Debido a las incertidumbres acerca de la resistencia del material, M se asume como una distribución Gaussiana con una media de 67.8 KN*m con un coeficiente de variación del 20%. La falla ocurre cuando dicha capacidad es excedida en cualquier punto de la viga.

a) Si solo una carga concentrada de 13.35 KN se aplica en el extremo libre, cual es la probabilidad de falla de la viga ?

b) Si solamente una carga uniforme de 7.30 KN/m se aplica a lo largo de toda la longitud, cuál es la probabilidad de falla de la viga ?



Problema 7

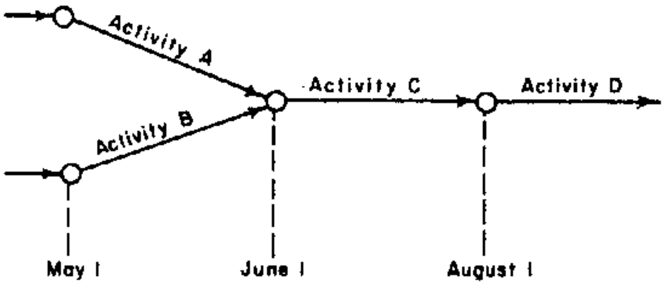
En la figura se muestra una parte de una red de tareas. El sentido de las flechas indican el comienzo y el final de cada tarea. La tarea C puede comenzar solo después de haberse completado las tareas A y B ; además la actividad D puede comenzar solo después de haberse completado las tareas C, A, B, C, D que son todas estadísticamente independientes.
El calendario de comienzo de tareas se muestra a continuación, y una actividad no puede empezar en una fecha más temprana a la programada. Por simplicidad se asumen los meses de 30 días.

Actividad A y B	**1 de Mayo**
Actividad C	**1 de Junio**
Actividad D	**1 de Agosto**

El tiempo requerido para completar cada actividad son variable aleatorias de tipo Gaussiano como las siguientes.

Actividad A	**N (25 días , 5 días)**
Actividad B	**N (26 días , 4 días)**
Actividad C	**N (48 días , 12 días)**
Actividad D	**N (40 días , 8 días)**

Asumiendo que ambas actividades A y B empiezan el 1 de Mayo,
a) Determine la probabilidad de que la actividad C no empieze a tiempo.
b) La necesidad de mano de obra hace que si la actividad C no empieza a tiempo, los equipos de trabajo se los destina a otro proyecto y no estarán disponibles para esta actividad por 90 días. Cuál es la probabilidad de que la actividad D empieze a tiempo ?



Problema 8

Un contratista estima que el tiempo que se necesitará para completar la tarea A es de 30 días. Debido a la incertidumbre del mercado de trabajo, suministro de materiales, malas condiciones del tiempo y demás, no está seguro de terminar la tarea en 30 días. A pesar de eso, está 90% seguro de que podrá completarlo en 40 días. Siendo la variable X el número de días requeridos para completar la tarea A,

a) Asumiendo que X es una variable aleatoria de tipo Gaussiana, determinar μ y σ y también la probabilidad de que X sea menor que 50, basado en la información dada.

b) Sabiendo que el rango de variables aleatorias gaussianas va de $-\infty$ a ∞ , y que X tome valores negativos es físicamente inmposible, determinar la probabilidad de ocurrencia. Basado en este resultado, asumir que X tenga una distribución normal es razonable ?

c) Ahora asumiendo que X tiene una distribución de tipo log-normal con los mismos valores de media y variancia que en la distribución normal de la parte a). Determinar los parámetros λ y ζ , y también la probabilidad de que X sea menor de 50. Comparar con los resultados de la parte a)

Problema 9

De información sobre reparación de equipos de construcción, se encontró que el tiempo de operación sin fallas (esto es el tiempo entre falla y falla de un equipo) puede ser modelizado como una variación de tipo log-normal, con una media de 6 meses y un desvío standard de 1.5 meses. Estando a cargo del mantenimiento de la condición operacional del parque de equipos de construcción, tenemos que tener al menos el 90% de probabilidad de que una pieza de cualquier equipo esté operacional en cualquier momento.

a) Cada cuanto tiempo cada pieza de equipo debe ser revisada para mantenimiento ?

b) Si una pieza particular del equipo está en buena condición operativa al tiempo que es revisada para mantenimiento, cuál es la probabilidad de que pueda operar al menos otro mes sin su mantenimiento regular ?

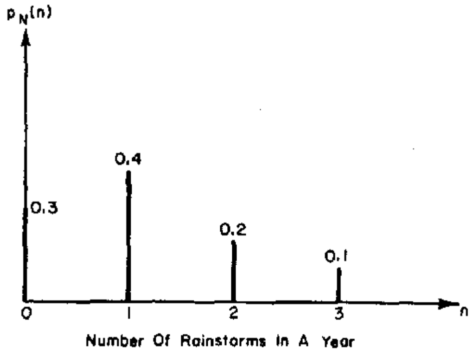
Problema 10

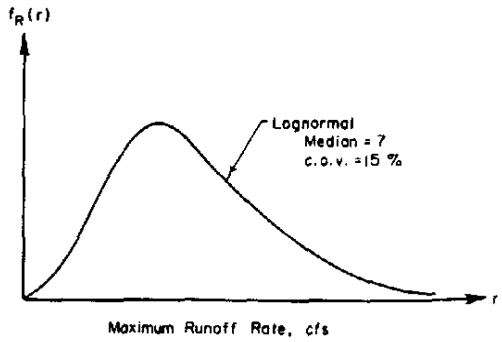
Un sistema de descarga pluvial se propone para una ciudad. para evaluar la efectividad de dicho sistema se analiza la siguiente información. La figura muestra la función de densidad del numero de ocurrencias de tormentas en cada año en dicha ciudad. También se muestra la función de distribución de la tasa máxima de precipitación que está representada por una log-normal con una media de 0.198 m3/seg y COV de 15%. Del punto de vista de un análisis hidráulico se deduce que el sistema es adecuado para cualquier tormenta con tasa de precipitación menor a 0.227 m3/seg. Asumiendo que la máxima tasa de precipitación entre tormentas son estadisticamente independientes.

a) Cual es la media y la variancia del número de tormentas en un año para la ciudad ?

b) Cuál es la probabilidad de inundación durante una tormenta ?

c) Cuál es la probabilidad de inundación en un año ?



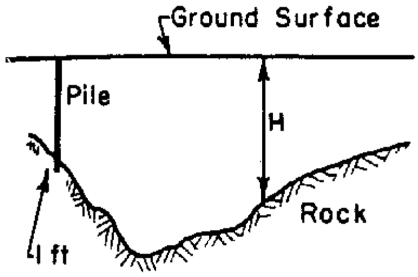


Problema 11

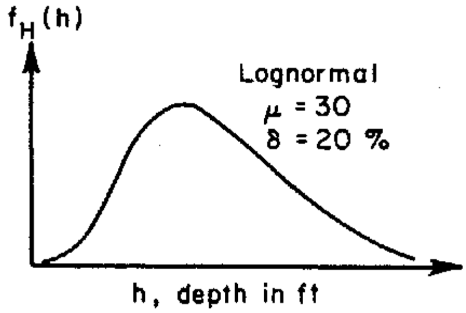
La profundidad en que un pilote puede ser hincado sin llegar al estrato rocoso se denomina H según la figura. Para un sitio de construcción dado, supongamos que dicha profundidad tiene una distribución log-normal con una media de 9.144 m y COV de 20%. Para obtener una adecuado soporte, el pilote debe ser penetrar 0.305 m dentro del estrato de roca.

a) Cuál es la probabilidad de que de que un pilote de 12.192 m no se ancla satisfactoriamente en la roca?

b) suponiendo que un pilote de 12.192 m de longitud ha penetrado 11.887 m en el suelo y la roca todavía no se encontró, Cuál es la probabilidad de que 1.524 m se suelden a la longitud original del pilote y que sean adecuados para lograr un anclaje satisfactorio en la roca ?



Esquema del pilote



Distribución lognormal de la profundidad

Problema 12

Un subsistema de distribución de agua está compuesto por las tuberías AB, BC y AC que se muestran en la figura. Debido a las diferencias tanto en elevación como en pérdidas de carga y otras incertidumbres, la capacidad de cada cañería (definida como porcentaje del máximo caudal) es la siguiente :

AB : capacidad con distribución Gaussiana con media $0.142 \cdot \frac{m^3}{s}$, COV 10%

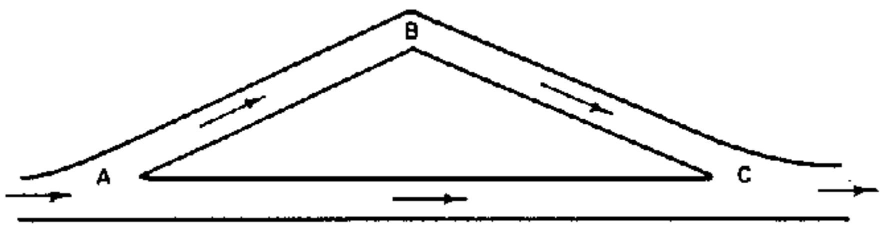
BC : capacidad con distribución log-normal con media $0.142 \cdot \frac{m^3}{s}$, COV 10%

AB : capacidad igual a 8 o 9 con igual probabilidad relativa

a) Determinar la probabilidad de que la capacidad del subsistema ABC exceda $0.113 \cdot \frac{m^3}{s}$

b) Determinar la probabilidad de que la capacidad total del subsistema exceda los $0.368 \cdot \frac{m^3}{s}$

(usar probabilidad condicional)



Problema 13

Un proyecto de construcción está a 30 días de su fecha programada de finalización. Dependiendo del estado del tiempo en el próximo mes, el tiempo remanente de la construcción tiene una distribución log-normal como la siguiente :

Tiempo	Tiempo requerido (días)
Bueno	$\mu = 25 \quad \sigma = 4$
Malo	$\mu = 30 \quad \sigma = 6$

Basado en investigaciones preliminares, el tiempo en el próximo mes tiene la misma probabilidad de que sea bueno o malo.

a) Cuál es la probabilidad de que hayya un retraso en la terminación del proyecto ?

b) Se contrató un meteorólogo para obtener información adicional de las condiciones del tiempo en el próximo mes. a pesar de eso, el especialista no está completamente seguro de su predicción. Generalmente sus predicciones son correctas el 90% de los casos, esto es P(PG/G) = 0.90 , y P(PB/B) = 0.90 , donde PG y PB son los eventos "tiempo probablemente bueno" y "tiempo probablemente malo", además G y B son los eventos "tiempo actualmente bueno" y "tiempo actualmente malo" respectivamente. Suponiendo que el especialista predice tiempo bueno para el mes próximo, Cuál es hoy la probabilidad de que haya un retraso en la terminaci'n del proyecto ?

Problema 14

La compacatación de una subrasante requiere tener una densidad de 110 pcf (pounds per cubic feet). Será aceptable si 4 o 5 muestras tomados al azar tienen al menos la densidad especificada.

a) Asumiendo que cada muestra tiene una probabilidad de 0.80 de tener la densidad requerida, Cuál es la probabilidad de que la subrasante sea aceptada ?

b) Cuál será la probabilidad de aceptación que cada muestra deberá tener, para que la probabilidad de que la subrasante sea aceptada sea del 80% ?

Problema 15

Un estudio preliminar del diseño de un puente sobre un río, recomienda una permisible probabilidad del 30% de que el puente sea excedido por una inundación en los próximos 25 años.

a) si P es la probabilidad de que el máximo nivel de inundación del puente sea sobrepasado en un año, Cuál será el valor de P que satisfaga el criterio de diseño anterior ?

b) Cuál será el período de retorno de este criterio de diseño ?

Problema 16

Tres diques de control de inundaciones se construyeron para prevenir este problema en la zona baja indicada en la figura. los diques se diseñaron de la siguiente manera :

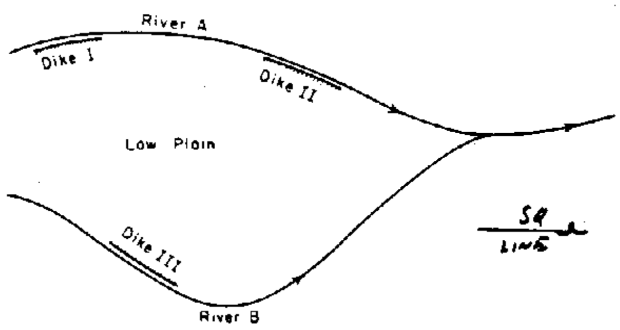
diseño del dique I es la inundación de 20 años del río A
diseño del dique II es la inundación de 10 años del río A
diseño del dique III es la inundación de 25 años del río B.

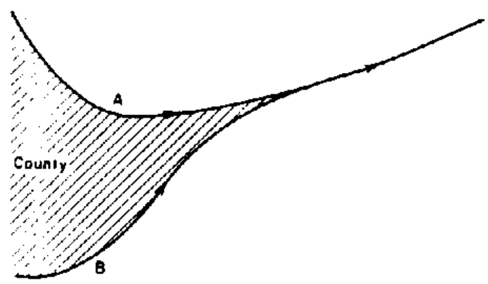
Asumiendo que las inundaciones en los ríos A y B, y las fallas de los diques I y II son estadísticamente independientes.

a) Calcular la probabilidad anual de inundación de la planicie baja causada por el río A solamente.

b) Cuál es la probabilidad de inundación de la planicie baja en un año ?

c) Cuál es la probabilidad de no inundación de la planicie baja en 4 años consecutivos ?





Problema 17

Una defensa tipo cajón se construye alrededor de un sector donde se proyecta una pila de puente, para que la construcción de dicha pila se haga en seco. La altura del cajón debe proteger el sitio de la marejada durante el período de construcción con una seguridad del 95%. La distribución mensual de la máxima altura de ola se asume como Gaussiana N(1.524,0.61) m sobre el nivel del mar.

a) Si la construcción tomará 4 meses, Cuál ser la altura de diseño del cajón por sobre el nivel del mar ? Asumir que las alturas máximas de ola mensuales son estadísticamente independientes.

b) Si el período de construcción puede ser acortado un mes con un costo adicional de $600, y el costo de construcción del cajón es de $2000 por metro sobre el nivel del mar, el contratista puede optar por esta alternativa ? Asumir que se aplica el mismo riesgo de ser sobrepasado por las olas.

Problema 18

La ocurrencia de inundaciones puede ser modelada como un proceso de Poisson. SI la tasa de ocurrencia media para una region A es una vez cada 8 años,

a) Determinar la probabilidad de que no haya inundación en un período de 10 años.
Determinar la probabilidad de que haya una inundación en un período de 10 años.
Determinar la probabilidad de que haya más de tres inundaciones en un período de 10 años.

b) Una estructura está localizada en la región A. La probabilidad de que sea alcanzada cuando hay una inundación es de 0.05. Calcular la probabilidad de que la estructura sobreviva si hay una inundación; y si hubiera "n" inundaciones. Asumir independencia estadística entre inundaciones.

c) Determinar la probabilidad de que la estructura sobreviva mas allá del período de 10 años.

Problema 19

Se está haciendo un estudio del tráfico de acceso a un puente con peaje. El volumen del tráfico es 120 vehiculos por hora de promedio, de los cuales 2/3 corresponde a autos, y 1/3 a camiones. El costo del peaje del puente es de $0.50 por auto y $2 por camión. Asumiendo que la llegada de los vehiculos puede modelarse como un proceso de Poisson.

a) Cuál es la probabilidad de que en un minuto, más de tres vehículos arriben al peaje ?

b) Cuál es el monto total probable cobrado a los vehículos en un período de tres horas ?

Problema 20

Los paros de los trabajadores de la construcción ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson; generalmente ocurre un paro cada tres años. La duración promedio de cada paro es de 15 días con un desvío standard de 5 días. Si al contratista le significa pérdidas por $10000 por día de paro

a) Cuál será la pérdida estimada del contratista durante un paro ?

b) Si la duración del paro fuera una variable de tipo normal, cuál es la probabilidad de que el contratista exceda los $20000 durante un paro ?

c) En un trabajo que lleve 2 años en completarse, cuál sería la pérdida estimada del contratista debido a posibles paros ? (Recordar que la ocurrencia de paros es un proceso de Poisson)

Problema 21

Suponiendo que los registros de huracanes de los últimos 10 años en una ciudad costera es la siguiente :

Año	Cantidad de huracanes
1961	1
1962	0
1963	0
1964	2
1965	1
1966	0
1967	0
1968	2
1969	1
1970	1

La ocurrencia de huracanes puede ser descripta como un proceso de Poisson. La máxima velocidad del viento en huracanes usualmente tiene una considerable fluctuación. Supongamos que los registros de esa ciudad se ajustan satisfactoriamente a una distribución log-normal con una media de 30.48 m/seg y un desvío standard de 6.096 m/seg

a) Basado en los datos disponibles, calcular la probabilidad de que haya al menos 1 huracán en esta ciudad en los próximos 2 años.

b) Si una estructura en esta ciudad se diseña para una velocidad de viento de 39.624 m/seg, cual es la probabilidad de que dicha velocidad de diseño sea superada por el próximo huracán ?

c) Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 huracanes en los próximos 2 años, y que no superen las velocidades de diseño de las estructuras en ese período ?

Problema 22

La concentración diaria de una sustancia contaminante en un curso de agua tiene la distribución exponencial mostrada en la figura.

a) Si la concentración diaria media de la sustancia es de $2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{mg}{l}$ determinar la constante C de la distribución exponencial.

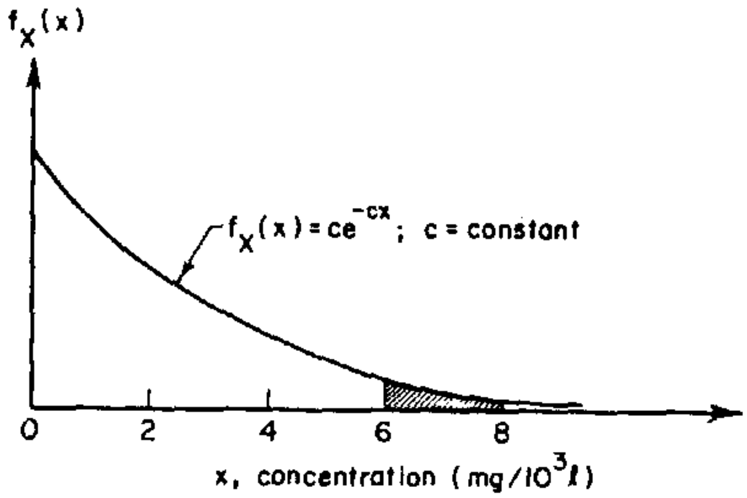
b) suponiendo que el problema de polución ocurre si la concentración de la sustancia excede los $6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{mg}{l}$ Cuál es la probabilidad de tener un problema de polución debido a esta sustancia en un solo día ?

c) Cuál es el período de retorno en días asociado a esta nivel de concentración de $6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{mg}{l}$?

Asumir que la concentración de la sustancia es estadísticamente independiente entre días.

d) Cuál es la probabilidad de que la sustancia cause un problema de polución al menos una vez en los próximos 3 días ?

e) Si en vez de una distribución exponencial, La concentración diara de la sustancia fuera Gaussiana con la misma media y variancia, cuál será la probabilidad de polución en un día en este caso?



Problema 23

El costo asociado al vaciado y llenado de una exclusa de navegación de un canal aumenta a medida que disminuye el tiempo requerido para cada ciclo de operación. Con el propósito de diseño, se observó que el tiempo de arribo de los buques tiene una distribución exponencial con un tiempo medio entre arribos de 0.50 horas. Asumiendo que la exclusa se diseña para que el 80% del tráfico pueda pasar sin tiempos de espera.

a) Cuál debiera ser el tiempo de cada ciclo de operación ?

b) Cuál es la probabilidad de que de 4 arribos sucesivos, ninguno tenga que esperar en la exclusa ?

c) Suponiendo que un barco zarpa de la ciudad A cada 8 horas y tiene que pasar por la exclusa para ir a su destino, Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los barcos que zarpan de la ciudad A tenga que esperar en la exclusa ?

Problema 24

En un puente con peaje, el transito en las horas pico que viene tanto del Este como del Oeste, se mide en intervalos de 10 segundos. La siguiente tabla muestra el número de observaciones para cada combinación de cómputo de tráfico tanto del Este como del Oeste.

		Vehículos del Oeste				
		0	**1**	**2**	**3**	**4**
Vehiculos del Este	**0**	2	5	15	40	58
	1	1	6	15	35	62
	2	18	15	28	30	30
	3	45	32	25	15	10
	4	65	58	35	15	5

Número total de observaciones = 665

Siendo X = número de observaciones de vehículos que vienen del Este en intervalo de 10 segundos
Siendo Y = número de observaciones de vehículos que vienen del Oeste en intervalo de 10 segundos

a) Calcular y dibujar la función de densidad de X y de Y
b) Calcular la función de distribución de X.
c) Si hubiera 3 vehículos que vienen del Este sobre el puente en un intervalo de 10 segundos, calcular la función de distribución de los vehículos que vienen del Oeste en el mismo intervalo.

d) En un intervalo de 10 segundos, cuál es la probabilidad de que 4 vehículos vayan hacia el este si hay 4 vehículos que van hacia el Oeste al mismo tiempo ?

e) Determinar la covariancia Cov(X, Y), y evaluar el correspondiente coeficiente de correlación entre X e Y

Problema 25

La función de distribución del costo de material y la mano de obra de un proyecto de construcción se modela como :

$$\left[f_{X,Y}(x,y)\right] = \left[\begin{array}{l} \left[2\cdot y\cdot e^{-y\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}\right] \quad \text{if} \quad (x, y \geq 0) \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{array}\right]$$

Donde X = Costo de materiales en \$100.000
Donde Y = Costo de mano de obra en \$100.000

a) Cuál es la probabilidad de que el costo de material y de mano de obra del próximo proyecto de construcción sea menor que \$100.000 y \$200.000 respectivamente ?

b) Determine la función de densidad marginal del costo de los materiales.

c) Determine la función de densidad marginal del costo de mano de obra.

d) Son los costos de material y mano dem obra estadísticamente independientes ?

e) Si se sabe que los costos de material de un proyecto son \$200.000, Cuál es la probabilidad de que el costo de mano de obra sea mayor a \$200.000 ?