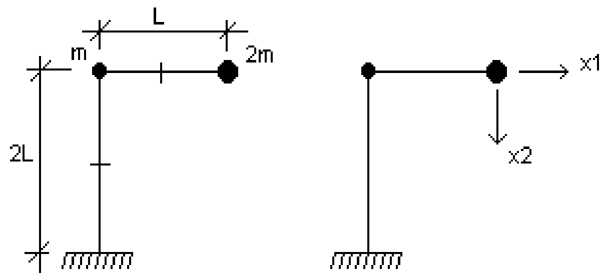
Análisis modal paso a paso de un modelo simple sometido al sismo de Mexico SCT 1985.



Reference:C:\Ing\Unidades\unidades.mcd

Armado del vector de influencia :

$$L := 3 \cdot m \qquad \iota := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$mp := \frac{30 \cdot Ton\_fuerza}{g} \qquad mp = 30000\, kg$$

Módulo de Elasticidad del material :

$$E := 20000 \cdot MPa \qquad E = 203873.598 \frac{kgf}{cm^2}$$

Sección de columna y viga :

$$b := 0.40 \cdot m$$
$$h := 0.40 \cdot m$$

Momento de inercia : $J := \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad J = 213333.333\, cm^4 \qquad B := E \cdot J$

Armado de la matriz de rigidez :

$$K := \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot B}{(2 \cdot L)^3} & 0 & -\frac{6 \cdot B}{(2 \cdot L)^2} & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot B}{L^3} & -\frac{6 \cdot B}{L^2} & -\frac{6 \cdot B}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot B}{(2 \cdot L)^2} & -\frac{6 \cdot B}{L^2} & \left(\frac{4 \cdot B}{2 \cdot L} + \frac{4 \cdot B}{L} \right) & \frac{2 \cdot B}{L} \\ 0 & -\frac{6 \cdot B}{L^2} & \frac{2 \cdot B}{L} & \frac{4 \cdot B}{L} \end{bmatrix}$$

Armado de matriz de masa :

$$M := mp \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 90000 & 0 \\ 0 & 60000 \end{pmatrix} \frac{kgf}{g}$$

Aplicando el procedimiento de condensación estática obtenemos la matriz de rigidez y de masa :

$$K := \frac{3}{20} \cdot \frac{B}{L^3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad M := mp \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculo de las frecuencias naturales de vibracion :

$$\omega := \overrightarrow{\sqrt{genvals(K, M)}} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 6.742 \\ 2.139 \end{pmatrix} \frac{1}{seg}$$

Reordenamiento de menor a mayor :

$$\omega := sort(\omega) \qquad \omega = \begin{pmatrix} 2.139 \\ 6.742 \end{pmatrix} \frac{1}{seg}$$

Calculo de los periodos de cada modo :

$$i := 0..1 \qquad T_i := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_i} \qquad T = \begin{pmatrix} 2.93733318 \\ 0.93200991 \end{pmatrix} seg$$

Calculo de los modos naturales de vibracion :

$$\phi s := genvecs(K, M) \qquad \phi s = \begin{pmatrix} 0.505 & -0.752 \\ -0.863 & -0.659 \end{pmatrix}$$

Reordenamiento de los modos moviendo las columnas :

$$n := 1$$
$$i := 0..n \qquad \phi^{\langle i \rangle} := \phi s^{\langle n-i \rangle} \qquad \phi = \begin{pmatrix} -0.752 & 0.505 \\ -0.659 & -0.863 \end{pmatrix}$$

Cálculo del factor de excitación símica modal :

$$i := 0..1 \qquad \phi^T \cdot M \cdot \iota = \begin{pmatrix} -67664.305 \\ 45426.224 \end{pmatrix} kg$$

Calculo de la masa generalizada modal :

$$Mg := \phi^T \cdot M \cdot \phi \qquad Mg = \begin{pmatrix} 76957.252 & -0 \\ 0 & 67642.748 \end{pmatrix} kg$$

Cálculo de la masa total :

$$MT := 3 \cdot mp + 2 \cdot mp \qquad MT = 150000 \, kg$$

Cálculo de la masa efectiva modal :

Verificacion :

$$\gamma_i := \frac{\left(\phi^{\langle i \rangle^T} \cdot M \cdot \iota\right)^2}{Mg_{i,i} \cdot MT} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \{1,1\} \\ \{1,1\} \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=0}^{1} \gamma_i = (0.6)$$

Calculo del factor de participacion modal :

$$L^{\langle i \rangle} := \frac{\phi^{\langle i \rangle^T} \cdot M \cdot \iota}{Mg_{i,i}} \qquad L = (-0.879 \quad 0.672)$$

Distribucion espacial de fuerzas de cada modo :

$$s^{\langle i \rangle} := M \cdot \phi^{\langle i \rangle} \cdot L^{\langle i \rangle} \qquad s = \begin{pmatrix} 6066.651 & 3110.795 \\ 3547.028 & -3547.028 \end{pmatrix} kgf$$

Verificacion :

$$M \cdot \iota = \begin{pmatrix} 90000 \\ 0 \end{pmatrix} kg \qquad \sum_{i=0}^{1} \left(L^{\langle i \rangle} \cdot \phi^{\langle i \rangle^{T}} \cdot M \right) = (90000 \quad 0)\, kg$$

ACELEROGRAMA DEL TERREMOTO DE SCT MEXICO 1985

Espacio de tiempo entre registros, $\Delta t := 0.02 \cdot seg$

Factor de escala para las aceleraciones, $f_e := 10^{-2}$

$Acc := READPRN(\text{"sct1s00e.txt"}) \cdot f_e$

$nf := rows(Acc) \quad nf = 1.8 \times 10^3$

$nc := cols(Acc) \quad nc = 5$

$$u''g := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..nf-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..nc-1 \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow k+1 \\ u''g_k \leftarrow Acc_{i,j} \end{array} \right. \\ u''g \cdot \dfrac{m}{seg^2} \end{array} \right.$$

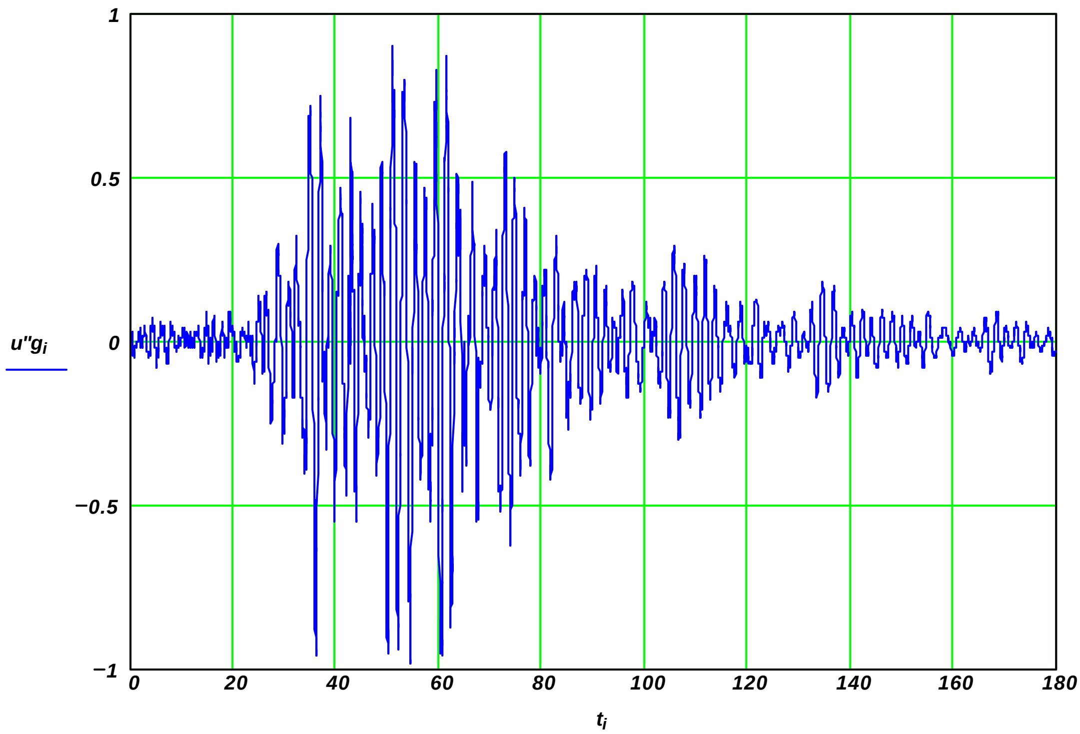
$n := last(u''g) \qquad n = 9 \times 10^3$

$i := 0..n$

$t_i := i \cdot \Delta t$

$u''gmax := max\left(\overrightarrow{|u''g|}\right)$

$u''gmax = 0.983 \dfrac{m}{seg^2}$

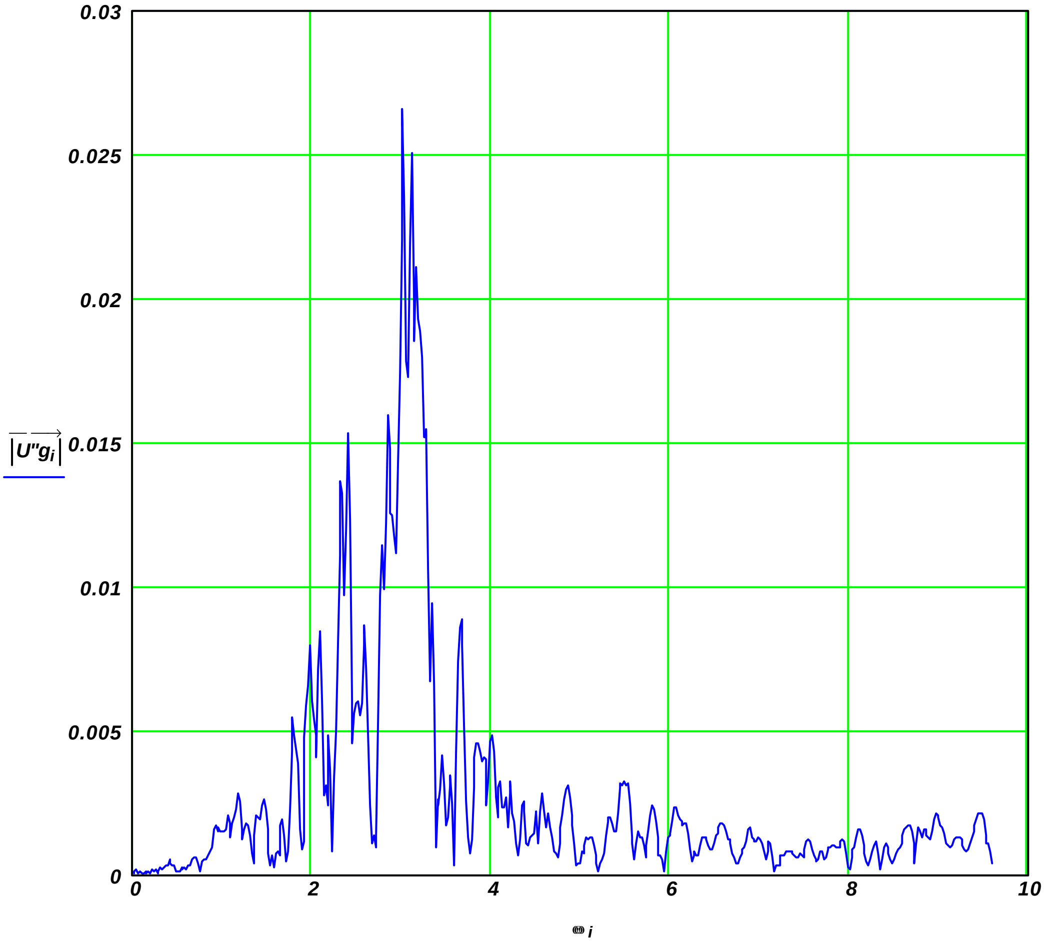


Ceros adicionados a la excitación,

$M := 14$ $\quad N := 2^M - 1$ $\quad N = 1.638 \times 10^4$ $\quad u''g_N := 0$ $\quad N \cdot \Delta t = 327.66$

Transformada de Fourier, $\quad U''g := FFT(u''g) \cdot \frac{m}{seg^2}$

$N_1 := last(U''g)$ $\quad N_1 = 8.192 \times 10^3$ $\quad j := 0 .. N_1$ $\quad \omega_j := \frac{j \cdot 2 \cdot \pi}{N \cdot \Delta t}$ $\quad i := 0 .. 500$



PRIMER MODO DE VIBRACION :

Amortiguamiento : $\zeta := 0.05$

$L := -0.879$

Numero de modo : $nmod := 0$

Periodo del modo : $T_n := 2.937185 \cdot seg$

Calculo de la frecuencia del modo :

$$\omega_n := \frac{2 \cdot \pi}{T_n} \qquad \omega_n = 2.139 \frac{1}{seg} \qquad \alpha(\omega) := \frac{1}{\omega_n^{\,2} - \omega^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot \omega_n \cdot i}$$

$i := 0 .. N_1$

Respuesta en el dominio de la frecuencia : $X_i := \alpha(\omega_i) \cdot U''g_i$

Respuesta en el dominio del tiempo : $x := IFFT(X)$

$i := 0 .. last(x) \qquad t_i := i \cdot \Delta t$

Maximo desplazamiento del oscilador :

$$Dn^{\langle nmod \rangle} := \vec{x} \qquad \left|max\left(Dn^{\langle nmod \rangle}\right)\right| = 0.432\,m$$

$$Dnmax := \left|max\left(Dn^{\langle nmod \rangle}\right)\right|$$

Maximo desplazamiento en coordenadas generalizadas :

$$Y := L \cdot Dnmax \qquad Y = -0.38\,m$$

Desplazamientos en cada coordenada :

$$p := 0 .. 1 \qquad U_{p,\,nmod} := \left(\phi_{p,\,nmod}\right) \cdot Y \qquad U^{\langle nmod \rangle} = \begin{pmatrix} 28.5486 \\ 25.0375 \end{pmatrix} cm$$

Historia de desplazamientos de cada coordenada :

$$UTH^{\langle p \rangle} := \left(\phi_{p,\,nmod}\right) \cdot L \cdot Dn^{\langle nmod \rangle}$$

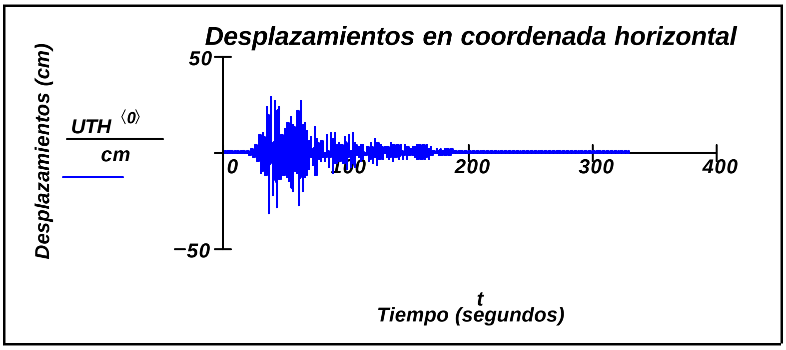
Calculo de las fuerzas en cada coordenada :

$$F^{\langle nmod \rangle} := K \cdot U^{\langle nmod \rangle} \qquad F^{\langle nmod \rangle} = \begin{pmatrix} 11988.368 \\ 7009.316 \end{pmatrix} kgf$$

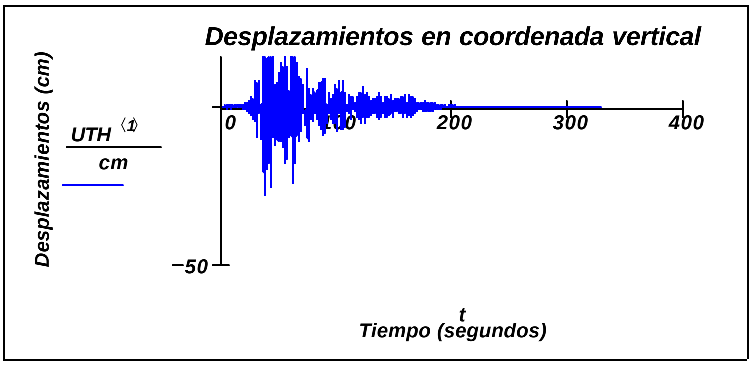
Historia de fuerzas en cada coordenada :

$$FTH_{i,\,0} := K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UTH_{i,\,0} \\ UTH_{i,\,1} \end{pmatrix} \qquad FTH_{i,\,1} := K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UTH_{i,\,0} \\ UTH_{i,\,1} \end{pmatrix}$$

Graficación de la historia de desplazamientos para el primer modo :

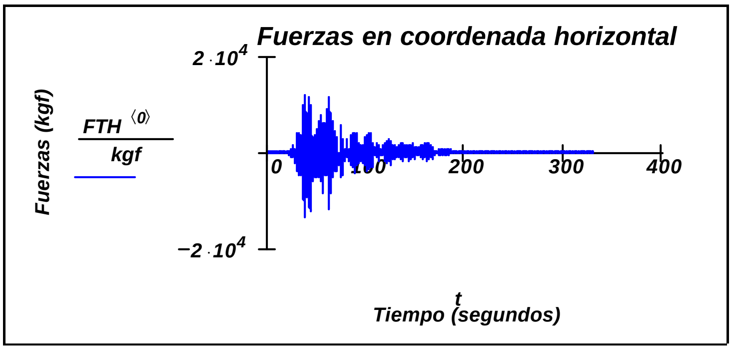


$$\max\left(UTH^{\langle 0 \rangle}\right) = 28.549\,cm$$

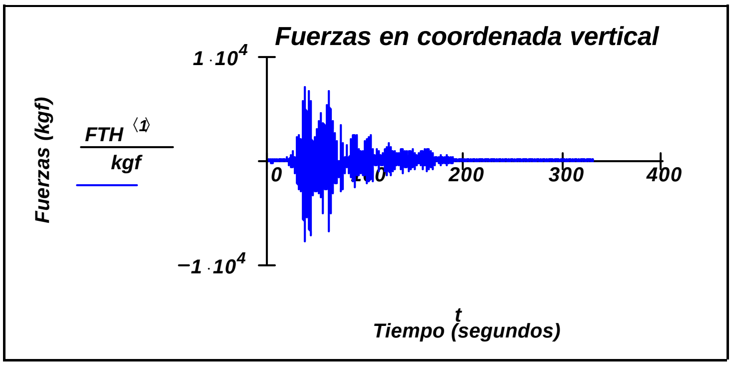


$$\max\left(UTH^{\langle 1 \rangle}\right) = 25.038\,cm$$

Graficación de la historia de fuerzas en cada coordenada para el primer modo :



$$\max\left(FTH^{\langle 0 \rangle}\right) = 11988.368\,kgf$$



$$\max\left(FTH^{\langle 1 \rangle}\right) = 7009.316\,kgf$$

SEGUNDO MODO DE VIBRACION :

Amortiguamiento : $\zeta := 0.05$

$L := 0.672$

Periodo del modo : $T_n := 0.936724 \cdot seg$

Numero de modo : $nmod := 1$

Calculo de la frecuencia del modo :

$$\omega_n := \frac{2 \cdot \pi}{T_n} \qquad \omega_n = 6.708 \frac{1}{seg} \qquad \alpha(\omega) := \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot \omega_n \cdot i}$$

$i := 0 .. N_1$

Respuesta en el dominio de la frecuencia : $X_i := \alpha(\omega_i) \cdot U''g_i$

Respuesta en el dominio del tiempo : $x := IFFT(X)$

$i := 0 .. last(x) \qquad t_i := i \cdot \Delta t$

Maximo desplazamiento del oscilador :

$$Dn^{\langle nmod \rangle} := \vec{x} \qquad \left| max\left(Dn^{\langle nmod \rangle}\right) \right| = 3.1905\, cm$$

$$Dnmax := \left| max\left(Dn^{\langle nmod \rangle}\right) \right|$$

Maximo desplazamiento en coordenadas generalizadas :

$$Y := L \cdot Dnmax \qquad Y = 0.021\, m$$

Desplazamientos en cada coordenada :

$$p := 0 .. 1 \qquad U_{p,nmod} := (\phi_{p,nmod}) \cdot Y \qquad U^{\langle nmod \rangle} = \begin{pmatrix} 1.0822 \\ -1.8509 \end{pmatrix} cm$$

Historia de desplazamientos de cada coordenada :

$$UTH^{\langle p \rangle} := (\phi_{p,nmod}) \cdot L \cdot Dn^{\langle nmod \rangle}$$

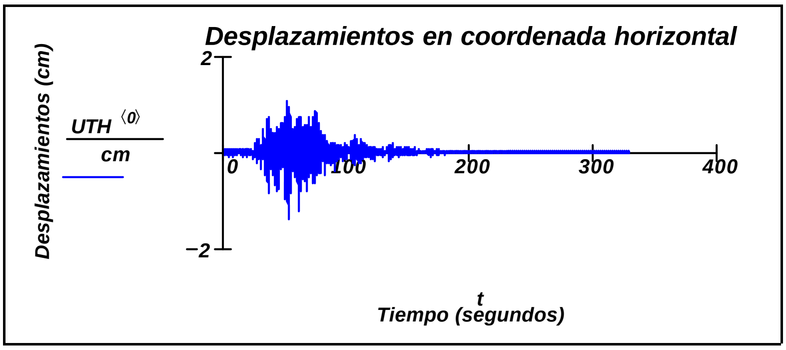
Calculo de las fuerzas en cada coordenada :

$$F^{\langle nmod \rangle} := K \cdot U^{\langle nmod \rangle} \qquad F^{\langle nmod \rangle} = \begin{pmatrix} 4513.697 \\ -5146.661 \end{pmatrix} kgf$$

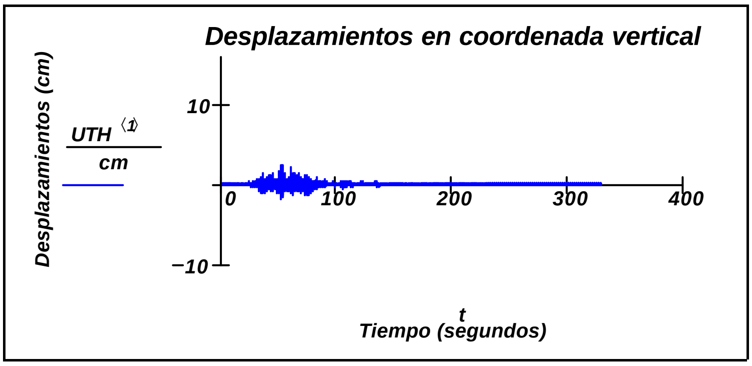
Historia de fuerzas en cada coordenada :

$$FTH_{i,0} := K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UTH_{i,0} \\ UTH_{i,1} \end{pmatrix} \qquad FTH_{i,1} := K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} UTH_{i,0} \\ UTH_{i,1} \end{pmatrix}$$

Graficación de la historia de desplazamientos para el segundo modo :

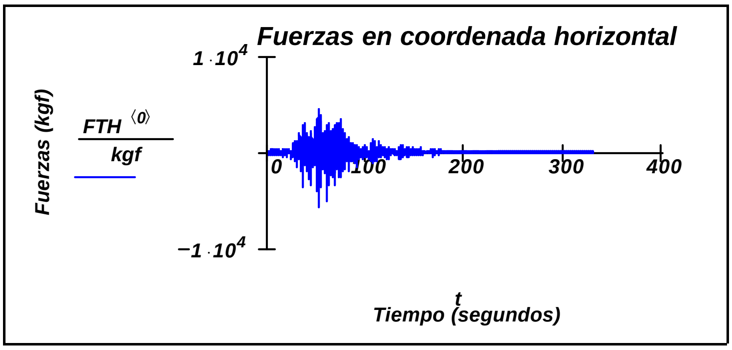


$$\max\left(UTH^{\langle 0\rangle}\right) = 1.082\,cm$$

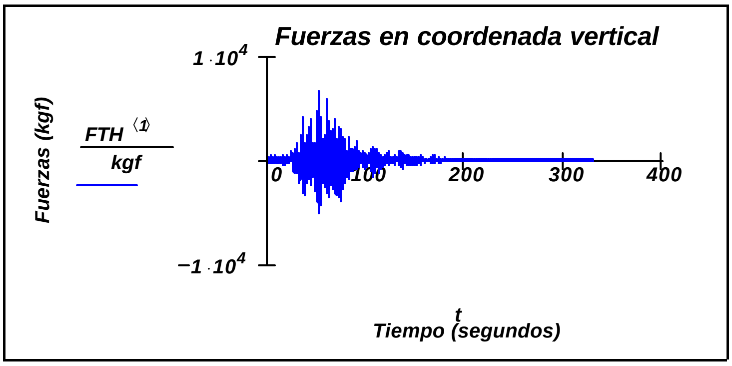


$$\max\left(UTH^{\langle 1\rangle}\right) = 2.368\,cm$$

Graficación de la historia de fuerzas en cada coordenada para el segundo modo :



$$\max\left(FTH^{\langle 0\rangle}\right) = 4513.697\,kgf$$



$$\max\left(FTH^{\langle 1\rangle}\right) = 6585.409\,kgf$$