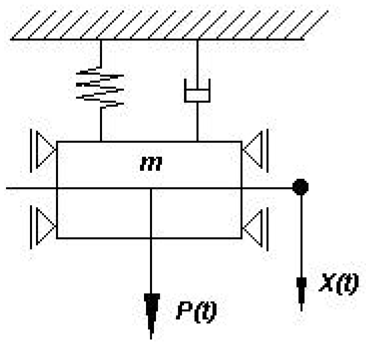
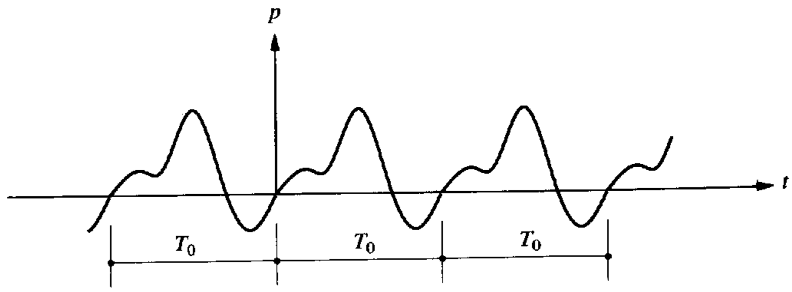
Acciones periódicas en sistemas amortiguados de un grado de libertad.





Analizamos en regimen permanente (no nos interesa la solución homogénea, sólo la particular

$$\boxed{x + 2\zeta\omega_n x + \omega_n{}^2 x = \frac{P(t)}{m}}$$

Una función periódica puede expresarse como la suma de un número infinito de términos seno o coseno. Dicha suma se conoce como ***Serie de Fourier***.

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\ cos(\omega\, t) + a_2\ cos(2\omega\, t) + a_3\ cos(3\omega\, t) + \ldots + a_j\ cos(j\omega\, t) +$$
$$+ b_1\ sin(\omega\, t) + b_2\ sin(2\omega\, t) + b_3\ sin(3\omega\, t) + \ldots + b_j\ sin(j\omega\, t)$$

La excitación se expresa como :

$$\boxed{P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j\ cos(j\omega\, t) + b_j\ sin(j\omega\, t))}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\ dt}$$

$a_0 =$ valor medio de la función periódica $P(t)$

$$\boxed{a_j = \frac{2}{T}\int_0^T P(t) cos(j\omega\, t) dt}$$

$$\boxed{b_j = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\ sin(j\omega\, t)\ dt}$$

La respuesta podemos expresarla como :

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(A_j cos(j\omega t)+B_j\ sin(j\omega t))$$

$$x(t)=\sum_{j=1}^{\infty}(j\omega\ )(-A_j\ sin(j\omega t)+B_j\ cos(j\omega t))$$

$$x(t)=\sum_{j=1}^{\infty}-(j\omega\ )^2(A_j\ cos(j\omega t)+B_j\ sin(j\omega t))$$

Reemplazando en la ecuación diferencial nos queda :

$$\sum_{j=1}^{\infty}-(j\omega\ )^2(A_j\ cos(j\omega t)+B_j\ sin(j\omega t))+2\zeta\omega_n\sum_{j=1}^{\infty}(j\omega\ )(-A_j\ sin(j\omega t)+B_j cos(j\omega t))+$$

$$+\omega_n^2\frac{A_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\ cos(j\omega t)+B_j\ sin(j\omega t))=\frac{1}{m}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\ cos(j\omega t)+b_j\ sin(j\omega t))\right]$$

Vimos que el desplazamiento estático era : $\boxed{X_0=\frac{P_0}{K}}$

LLamamos : $P_0=\frac{a_0}{2}$ y $X_0=\frac{A_0}{2}$

Como $K=m\,\omega_n^{\,2}$ reemplazando nos queda : $m\,\omega_n^{\,2}\frac{A_0}{2}=\frac{a_0}{2}$

$$\boxed{A_0=\frac{a_0}{m\,\omega_n^{\,2}}=\frac{a_0}{K}}$$

Agrupamos términos en ***sen(jω t)*** y ***cos(jω t)*** y tenemos en cuenta que :

$$\omega_n^{\,2}\frac{A_0}{2}=\frac{1}{m}\frac{a_0}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Terminos en :} & cos(j\omega t)\rightarrow -(j\omega\ )^2A_j+\ j\omega\ 2\zeta\omega_n\ B_j\ +\omega_n^{\,2}A_j\ =\dfrac{a_j}{m}\\ \text{Terminos en :} & sin(j\omega t)\rightarrow -(j\omega\ )^2B_j+\ j\omega\ 2\zeta\omega_n\ A_j\ +\omega_n^{\,2}B_j\ =\dfrac{b_j}{m}\end{array}\right\}$$

Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\boldsymbol{A_j}$ y $\boldsymbol{B_j}$

$$\begin{bmatrix}\left(\omega_n^{\,2}-j^2\omega^{\,2}\right) & j\omega\ 2\zeta\omega_n\\ \left(\omega_n^{\,2}-j^2\omega^{\,2}\right) & -j\omega\ 2\zeta\omega_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_j\\ B_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_j\\ b_j\end{Bmatrix}\frac{1}{m}$$

$$\Delta_j = \left(\omega_n^2 - j^2\omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_n j\omega)^2$$

$$\boxed{A_j = \frac{1}{m\Delta_j}\left[\left(\omega_n^2 - j^2\omega^2\right)a_j - (2\zeta\omega_n j\omega)\,b_j\right]}$$

$$\boxed{B_j = \frac{1}{m\Delta_j}\left[(2\zeta\omega_n j\omega)\,a_j - \left(\omega_n^2 - j^2\omega^2\right)b_j\right]}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(A_j\cos(j\omega t) + B_j\sin(j\omega t)\right)}$$

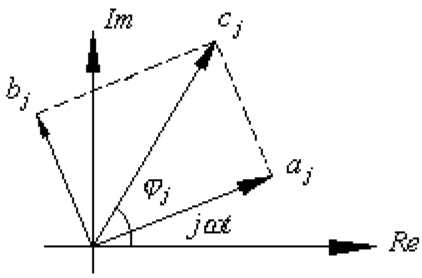
<u>Expresión de la perturbación y la respuesta en el campo complejo :</u>

Tomando un armónico cualquiera e igualando

$$a_j\cos(j\omega t) + b_j\sin(j\omega t) = c_j\cos(j\omega t + \varphi_j) = c_j\cos(j\omega t)\cos\varphi_j - c_j\sin(j\omega t)\sin\varphi_j$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} a_j &= c_j\cos\varphi_j \\ b_j &= -c_j\sin\varphi_j \end{aligned}\right\} tg\varphi_j = -\frac{b_j}{a_j}}$$

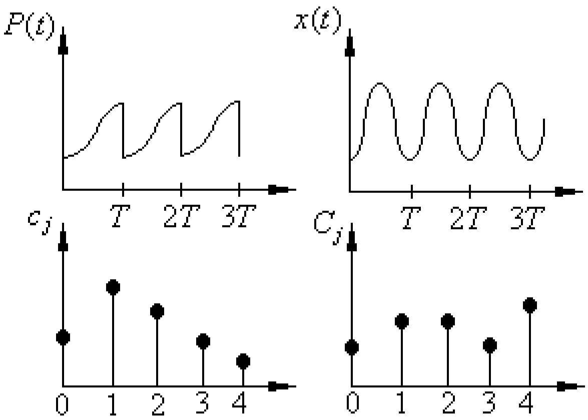
$$\boxed{c_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}}$$



También representamos la respuesta en el campo complejo. Análogamente podemos escribir :

$$\boxed{\left.\begin{aligned} A_j &= C_j\cos\varphi_j \\ B_j &= -C_j\sin\varphi_j \end{aligned}\right\} tg\varphi_j = -\frac{B_j}{A_j}}$$

$$\boxed{C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}}$$



<u>Dominio del tiempo</u>

<u>Dominio de frecuencias</u>

Expresión de la perturbación y la respuesta en el campo complejo y con la forma exponencial de la serie de Fourier :

Sabemos que :

$$cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} \rightarrow cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$sin(x) = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} \rightarrow -sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Restando ambas expresiones nos queda : $\boxed{cos(x) - sin(x) = e^{-ix}}$

Expresamos la perturbación :

$$\boxed{P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \; cos(j\omega \, t) + b_j \; sin(j\omega \, t))}$$

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \frac{e^{ij\omega \, t} + e^{-ij\omega \, t}}{2} + b_j \frac{e^{ij\omega \, t} - e^{-ij\omega \, t}}{2})$$

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{a_j - ib_j}{2} e^{ij\omega \, t} + \frac{a_j - ib_j}{2} e^{-ij\omega \, t})$$

Si llamamos : $\boxed{C_0 = \frac{a_0}{2}}$ $\boxed{C_j = \frac{a_j - ib_j}{2}}$ $\boxed{C_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2} = \bar{C}_j}$

Podemos escribir :

$$P(t) = C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \, e^{ij\omega \, t} + C_j \, e^{-ij\omega \, t})$$

$$P(t) = C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \; e^{ij\omega \, t} + \underbrace{\sum_{j=1} C_j \; e^{-ij\omega \, t}}_{\sum_{j=-\infty}^{1} \bar{C}_j \, e^{ij\omega \, t}}$$

$$\boxed{P(t) = C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \; e^{ij\omega \, t} + \sum_{j=-\infty}^{1} \bar{C}_j \; e^{ij\omega \, t}}$$

$$\boxed{P(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \; e^{ij\omega \, t}}$$

Con $a_j = 2 \, Re\{C_j\}$

$b_j = -2 \, Im\{C_j\}$

Siendo :

$$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\,\cos(j\omega\,t)dt$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\,\sin(j\omega t\,)dt$$

$$c_j = \frac{a_j + ib_j}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,(\underbrace{\cos(j\omega\,t) - i\ sen(\,j\omega\,t)}_{e^{-ij\omega t}})dt$$

$$\boxed{c_j = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,e^{-ij\omega\,t}dt}$$

Expresión de la respuesta :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos(j\omega\,t) + B_j\ \sin(j\omega\,t))$$

Análogamente llegamos a la expresión :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{A_j - i\ B_j}{2}e^{ij\omega\,t} + \frac{A_j - i\ B_j}{2}e^{-ij\omega\,t}\right)$$

Llamando :

$$\boxed{X_0 = \frac{A_0}{2}} \qquad \boxed{X_j = \frac{A_j - iB_j}{2}} \qquad \boxed{X_{-j} = \frac{A_j + iB_j}{2} = \overline{X}_j}$$

Desarrollando análogamente llegamos a :

$$x(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(X_j\ e^{ij\omega\,t} + X_j\ e^{-ij\omega\,t})$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty}X_j\ e^{ij\omega\,t} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}X_j\ e^{-ij\omega\,t}}_{\sum_{j=-\infty}^{1}\overline{X}_j\,e^{ij\omega\,t}}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty}X_j\ e^{ij\omega\,t} + \sum_{j=-\infty}^{1}\overline{X}_j\ e^{ij\omega\,t}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}X_j\ e^{ij\omega\,t}}$$

Con $A_j = 2\ Re\{X_j\}$

$B_j = -2Im\{X_j\}$

Ahora faltan calcular los X_j . Para ello derivamos y reemplazamos en la ecuación diferencial

$$x(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} ij\omega \; X_j \; e^{ij\omega t}$$

$$x(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} -(j\omega)^2 X_j \; e^{ij\omega t}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial nos queda :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[-(j\omega)^2+2\zeta\omega_n ij\omega+\omega_n^{\,2}\right]X_j\,\cancel{e^{ij\omega t}}=\frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_j\,\cancel{e^{ij\omega t}}$$

$$X_j=\frac{1}{-(j\omega)^2+\underbrace{2\zeta\omega_n ij\omega}_{\approx 0}+\omega_n^{\,2}}\frac{C_j}{m}$$

$$X_j=\alpha(ij\omega)\frac{C_j}{m}$$

$$\boxed{\alpha(ij\omega)=\frac{1}{-(j\omega)^2+2\zeta\omega_n ij\omega+\omega_n^{\,2}}}$$

Función de transferencia o función de respuesta compleja

La gran ventaja de usar dominio de frecuencias es que puedo resolver la ecuación diferencial algebraicamente

Conclusión : hay que sacar la estructura de las frecuencias asociadas a los grandes armónicos C_j

$$para\ \zeta=0$$

$$X_j=\frac{1}{-(j\omega)^2+\omega_n^{\,2}}\frac{C_j}{m}$$

$$si\ \omega_n^{\,2}\approx-(j\omega)^2\rightarrow C_j\ grande\rightarrow\ grandes\ desplazamientos$$

Valor cuadrático medio de ***X(t)***

$$\frac{1}{T}\int_0^T[x(t)]^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos(j\omega t)+B_j\sin(j\omega t))\right]^2dt$$

$$=\frac{A_0^{\,2}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(A_j^{\,2}+B_j^{\,2})=C_0^{\,2}+2\sum_{j=1}^{\infty}C_j\overline{C}_j=\boxed{C_0^{\,2}+2\sum_{j=1}^{\infty}\left|C_j\right|^2}$$

Indica en qué frecuencias tenemos concentrada la energía.
Las frecuencias importantes de ***C*** no deben coincidir con las frecuencias naturales de la estructura

Cálculo de la expresión de x(t) usando sólo los C_j y no los C_{-j} :

$$x(t)= \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j\, e^{ij\omega t} = \sum_{j=-\infty}^{-1} X_j\, e^{ij\omega t} + X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j\, e^{ij\omega t} == \sum_{j=1}^{\infty} X_{-j}\, e^{-ij\omega t} + X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j\, e^{ij\omega t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{X_j}\, e^{\overline{ij\omega t}} + X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j\, e^{ij\omega t} =$$

$$= X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\overline{X_j\, e^{ij\omega t}} \right) + \left(X_j\, e^{ij\omega t} \right) \right] =$$

$$\boxed{x(t)= X_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} Re\left\{ X_j\, e^{ij\omega t} \right\}}$$

Expresión de los desplazamientos

$$x(t)= \sum_{j=-\infty}^{\infty} ij\omega\, X_j\, e^{ij\omega t} = \sum_{j=-\infty}^{-1} ij\omega\, X_j\, e^{ij\omega t} + \sum_{j=1}^{\infty} ij\omega\, X_j\, e^{ij\omega t} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} ij\omega\, X_{-j}\, e^{-ij\omega t} + \sum_{j=1}^{\infty} ij\omega\, X_j\, e^{ij\omega t} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} ij\omega\, \overline{X_j\, e^{ij\omega t}} + \sum_{j=1}^{\infty} ij\omega\, X_j\, e^{ij\omega t} =$$

$$\boxed{x(t)= -2\sum_{j=1}^{\infty} j\omega\;\; Im\left\{ X_j\, e^{ij\omega t} \right\}}$$

Expresión de las velocidades

Mediante un desarrollo análogo al anterior pordemos obtener la expresión de las aceleraciones

$$\boxed{x(t)= 2\sum_{j=1}^{\infty} -(j\omega)^2\;\; Re\left\{ X_j\, e^{ij\omega t} \right\}}$$

Expresión de las aceleraciones

Verificación numérica del problema de un sistema de un grado de libertad somentido a la acción de cargas periódicas :

Reference:C:\ING\DYNAM\Programas\unidades.mcd

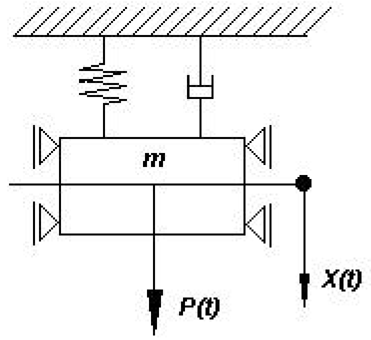
Datos del modelo :

Amortiguacion del sistema : $z := 0.2$

Rigidez del sistema : $K := 100000 \cdot \frac{kg}{cm}$

Masa del sistema :

$$M := \frac{98000 \cdot kg}{9.8 \cdot \frac{m}{seg^2}} \qquad M = 100 \frac{kg \cdot seg^2}{cm}$$



Datos de la excitación :

Periodo de la excitacion : $Tc := 4 \cdot seg$

Tiempo total de analisis : $T := 8 \cdot seg$

Cálculo de la frecuencia de la excitación :

$$\boxed{w := \frac{2 \cdot p}{T}} \qquad w = 0.785 \frac{1}{seg}$$

Cálculo de la frecuencia natural :

$$\boxed{wn := \sqrt{\frac{K}{M}}} \qquad wn = 31.623 \frac{1}{seg}$$

Expresión de la excitación :

$$Fo := 100000 \cdot kg$$

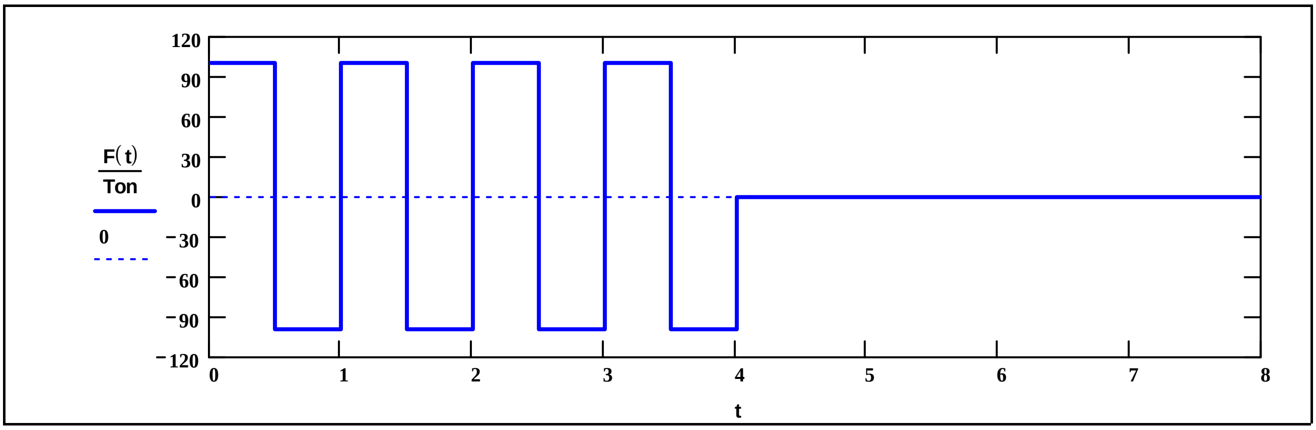
$$\boxed{wc := \frac{2 \cdot p}{Tc}} \qquad wc = 1.571 \frac{1}{seg} \qquad int := \frac{Tc}{8}$$

$$F(t) := \left| \begin{array}{l} Fo \ \text{ if } \ 0 \le t \le int \\ (-Fo) \ \text{ if } \ int \le t \le 2 \cdot int \\ Fo \ \text{ if } \ 2 \cdot int \le t \le 3 \cdot int \\ -Fo \ \text{ if } \ 3 \cdot int \le t \le 4 \cdot int \\ Fo \ \text{ if } \ 4 \cdot int \le t \le 5 \cdot int \\ -Fo \ \text{ if } \ 5 \cdot int \le t \le 6 \cdot int \\ Fo \ \text{ if } \ 6 \cdot int \le t \le 7 \cdot int \\ -Fo \ \text{ if } \ 7 \cdot int \le t \le 8 \cdot int \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Graficacion de la excitacion :

Como puede observarse, la excitación periódica actúa los primeros cuatro segundos, mientras que el tiempo de análisis total es de 8 segundos

$t := 0, 0.001 .. T$



Cálculo de la respuesta usando transformada rápida de Fourier :

$mexp := 10$

$l := 0 .. 2^{mexp} - 1$

$Dt := \frac{T}{2^{mexp}}$

$t_l := l \cdot Dt$

$V_l := F(t_l)$ $\qquad C := FFT(V)$

Cantidad de armonicas : $n := 70$

Coeficientes de Fourier :

$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot Re(C_j)$ $\qquad b1_j := -2 \cdot Im(C_j)$

C = (KN)

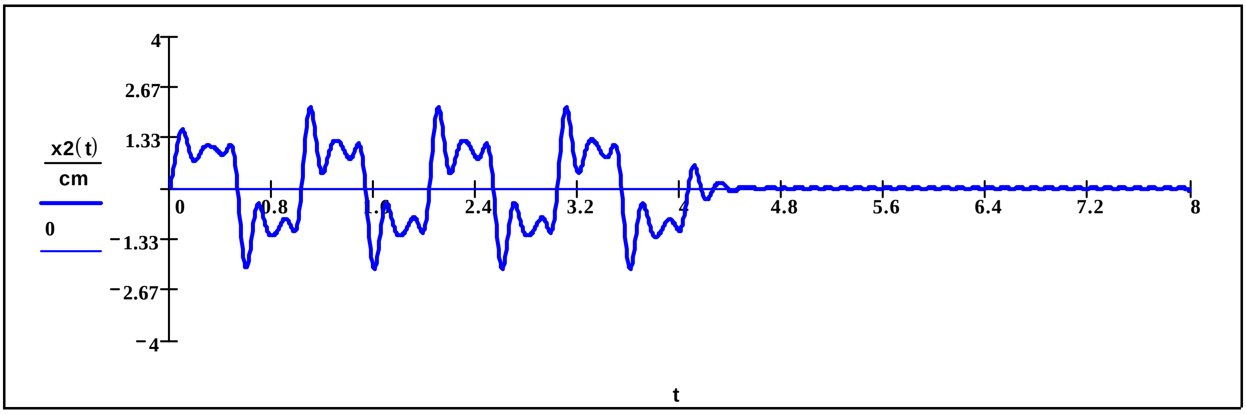
-0.957
63.006+0.19i
-0.957
70.433+0.639i
-0.957
94.321+1.432i
-0.957
224.958+4.811i
6.699-311.881i
-173.248-4.811i
-0.957
-41.468-1.432i
-0.957
-15.068-0.639i
-0.957
-3.177-0.19i

Armado de la respuesta con los términos obtenidos con la FFT :

$$\boxed{X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}}$$

$t := 0 \cdot seg, Dt \cdot seg .. T \cdot seg$

$$x2(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



Análisis para distinto número de armónicos a utilizar en el cálculo de la respuesta :

1 Armónico $n := 1$

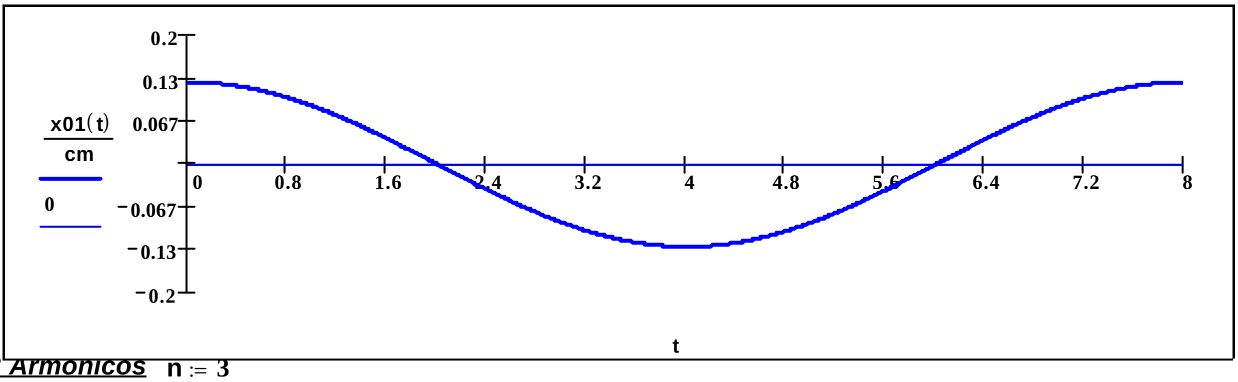
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot \mathrm{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \mathrm{Im}(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x01(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



3 Armónicos $n := 3$

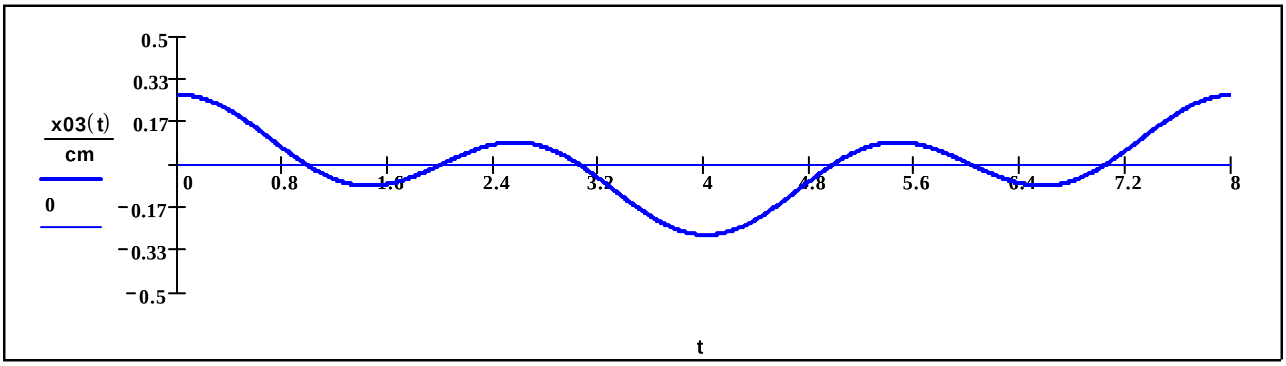
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot \mathrm{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \mathrm{Im}(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x03(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



5 Armónicos $n := 5$

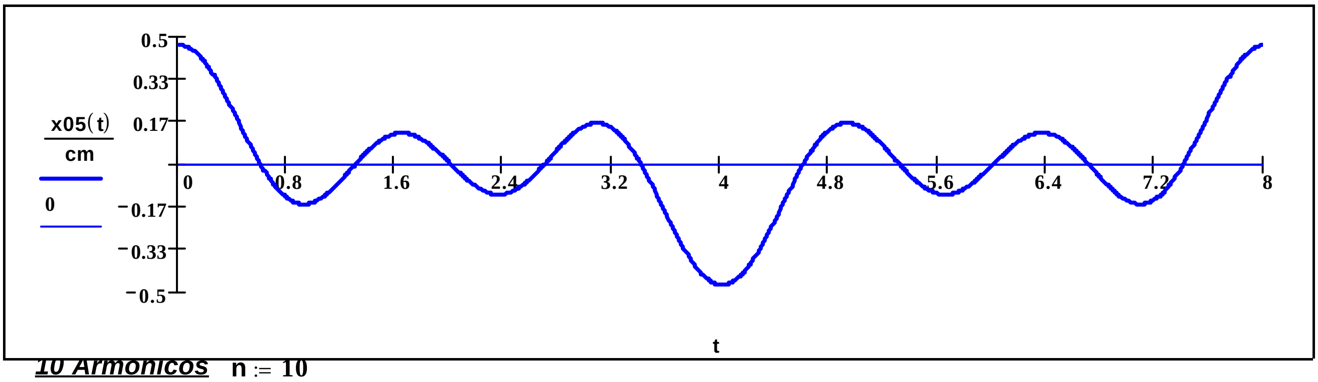
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot \mathrm{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \mathrm{Im}(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x05(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



10 Armónicos $n := 10$

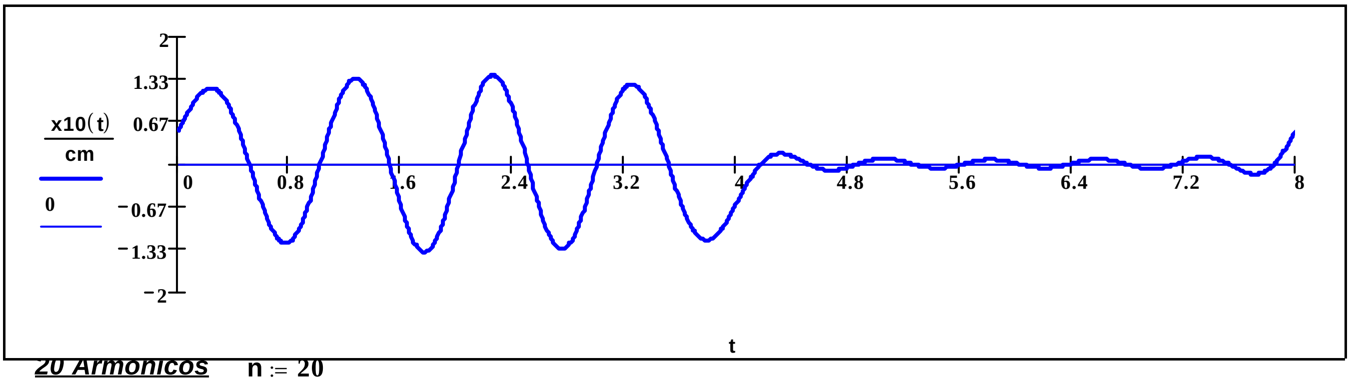
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot \mathrm{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \mathrm{Im}(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x10(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



20 Armónicos $n := 20$

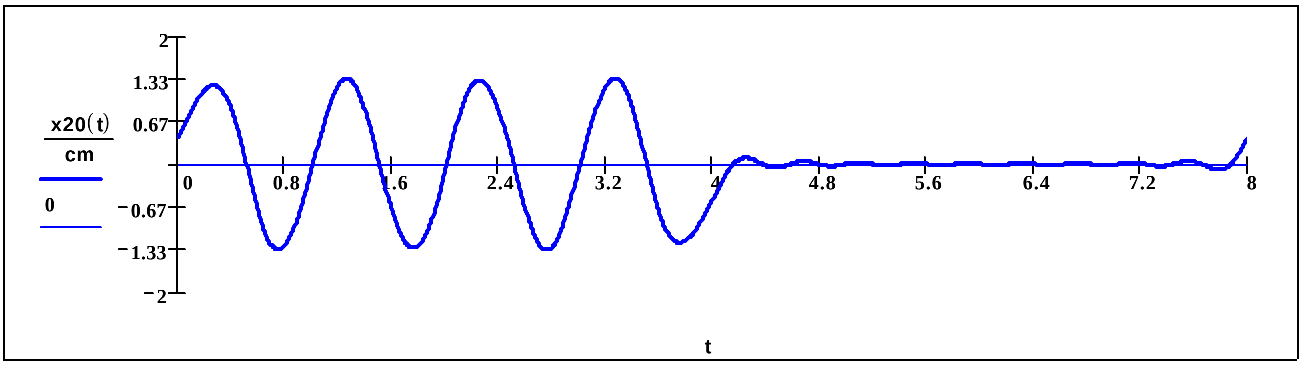
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot \mathrm{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \mathrm{Im}(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x20(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



50 Armónicos $n := 50$

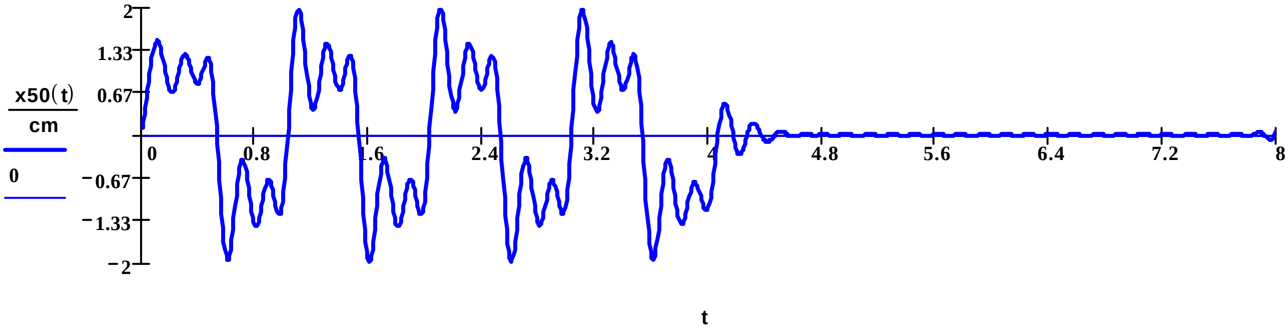
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot Re(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot Im(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x50(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} Re\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



70 Armónicos $n := 70$ ***SOLUCION EXACTA***

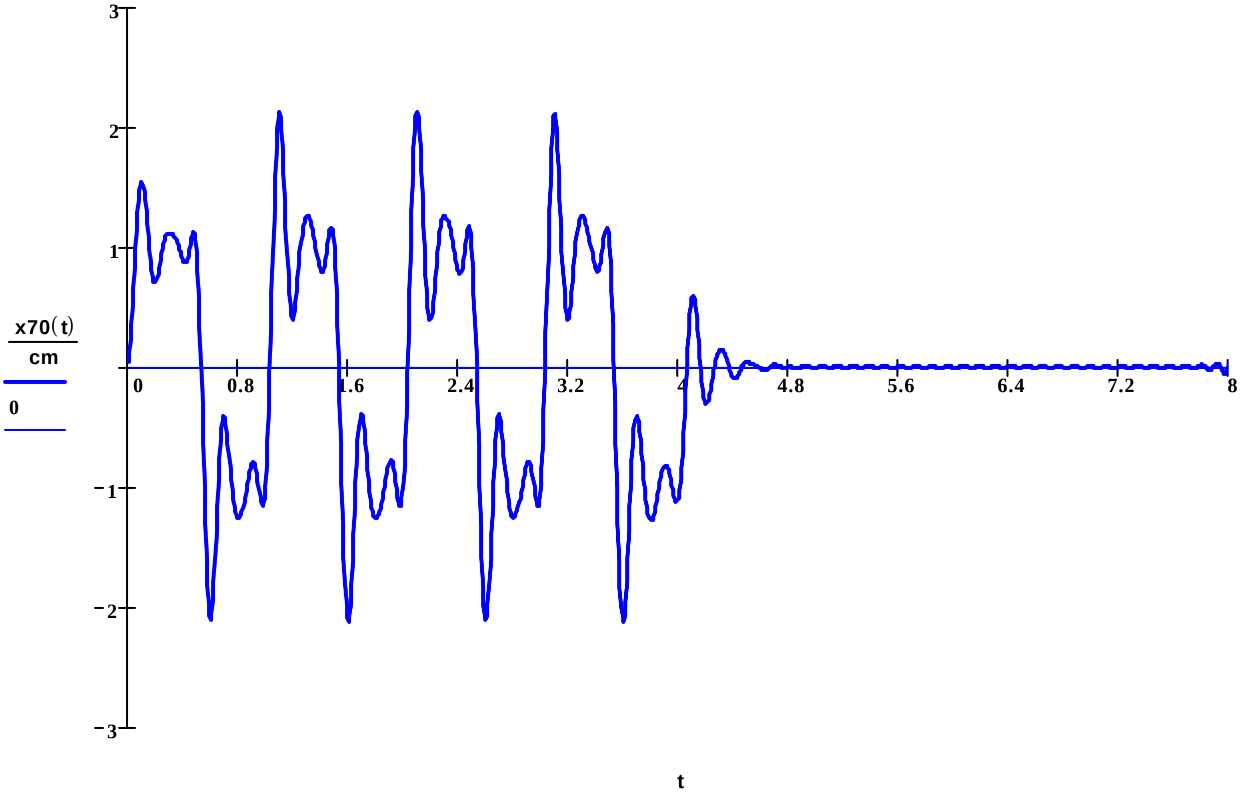
$j := 0 .. n$

$a1_j := 2 \cdot Re(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot Im(C_j)$

$$X_j := \frac{C_j}{M \cdot \left[-(j \cdot w)^2 + 2 \cdot z \cdot wn \cdot i \cdot j \cdot w + wn^2\right]}$$

$$x70(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} Re\left(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot w \cdot t}\right)$$



Comparación de las distintas respuestas elaboradas con distintos números de armónicos :