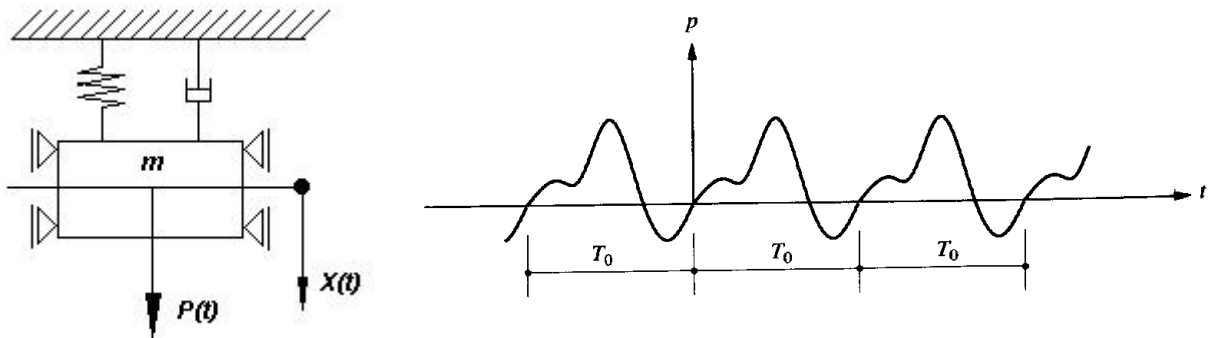


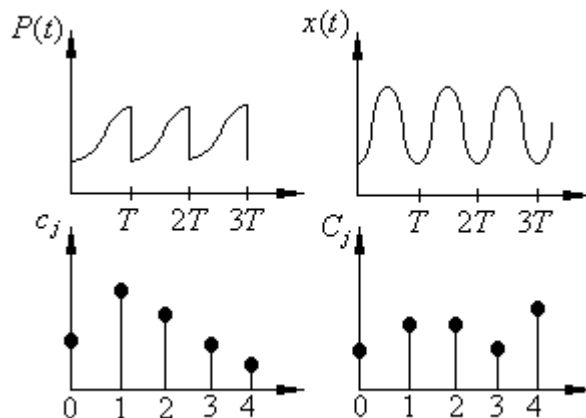
Solicitaciones Aperiódicas en serie de Fourier exponencial compleja.

Dada una sollicitación periódica como la siguiente :



Ecuación de equilibrio dinámico :

$$x + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2 x = \frac{P(t)}{m}$$



Dominio del tiempo

Dominio de frecuencias

La expresión de la sollicitación se expresaba como :

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ij\omega t}$$

Llamando : $f(t) = \frac{P(t)}{m}$

La expresión de los armónicos resultaba :

$$C_j = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-ij\omega t} dt \quad , \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La expresión de la respuesta resultaba :

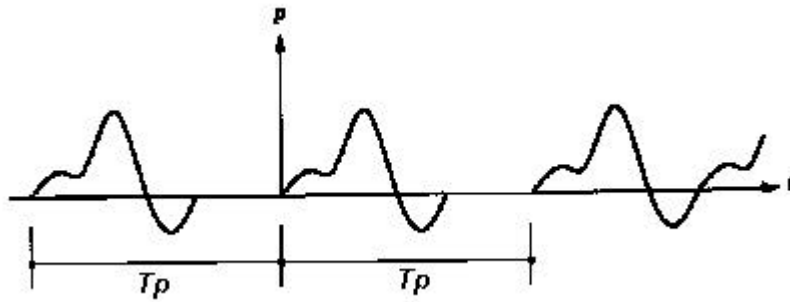
$$\boxed{X_j = \alpha(j\omega) C_j}$$

con la *función de transferencia* :

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

$$\boxed{X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j e^{ij\omega t}}$$

Vamos a suponer una carga periódica $f(t)$ cualquiera :



suponemos $f(t)$ periódica como indica el gráfico, cuanto más alargemos el período T_p , obtenemos la función $P(t)$ original

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad \omega_j = j\Delta\omega$$

Se reescribe la expresión de $P(t)$ multiplicando y dividiendo por T_p :

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} C_j T_p e^{ij\omega t}$$

Donde : $C_j T_p = \int_0^{T_p} f(t) e^{-ij\omega t} dt = C(j\omega)$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} C(j\omega) e^{ij\omega t}}$$

Esto es para la $f(t)$ periódica. Para tener la aperiódica debo hacer tender T_p a infinito

$$T_p \rightarrow \infty$$

$$\Delta\omega \rightarrow d\omega$$

$$j\omega \rightarrow \omega$$



$$C(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

La expresión matemática coincide con la transformada de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La expresión matemática coincide con la antitransformada de Fourier.

La representación de una función aperiódica en el dominio de las frecuencias es su Transformada de Fourier.

Expresión de la solución en el dominio de las frecuencias :

Partiendo de : $X(t) = \int_{j=-\infty}^{\infty} X_j e^{ij\omega t} d\omega$ con : $X_j = \alpha(ij\omega) C_j$

$$X(t) = \int_{j=-\infty}^{\infty} \alpha(ij\omega) C_j e^{ij\omega t} d\omega$$

Multiplicando y dividiendo por T_p nos queda :

$$X(t) = \int_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} \alpha(ij\omega) C_j T_p e^{ij\omega t} d\omega$$

$$X(t) = \int_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \alpha(ij\omega) C(ij\omega) e^{ij\omega t} d\omega$$

Lo mismo que antes, hacemos tender

$$T_p \rightarrow \infty \quad \Delta\omega \rightarrow d\omega \quad j\omega \rightarrow \omega$$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(i\omega) C(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



Resulta entonces :

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Donde :

$$X(i\omega) = \frac{1}{(-j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} C(i\omega)$$

La sollicitación periódica tiene representación **discreta** en el dominio de las frecuencias.

La sollicitación aperiódica tiene representación **continua** en el dominio de las frecuencias.

☐ Reference: C:\Vng\unidades.mcd

Datos del problema :

Periodo de la excitacion : $T_c := 4 \text{ seg}$ Amortiguacion del sistema : $\zeta := 0.03$

Tiempo total de analisis : $T := 20 \text{ seg}$

Masa del sistema :

Rigidez del sistema : $K := 100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$

$$M := \frac{98000 \cdot \text{kgf}}{9.8 \cdot \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}} \quad M = 981 \frac{\text{kg} \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$$

Cálculo de la frecuencia de la excitación :

Cálculo de la frecuencia natural :

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \omega = 0.314 \frac{1}{\text{seg}}$$

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \omega_n = 10.096 \frac{1}{\text{seg}}$$

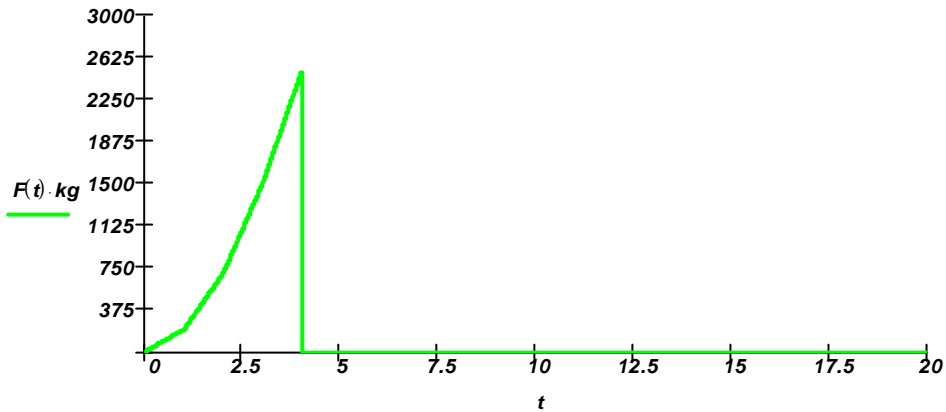
Expresión de la excitación :

$$\text{data} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 \cdot T_c & 200 \cdot \text{kg} \\ 0.5 \cdot T_c & 700 \cdot \text{kg} \\ 0.75 \cdot T_c & 1500 \cdot \text{kg} \\ T_c & 2500 \cdot \text{kg} \end{pmatrix} \quad \text{data} := \text{csort}(\text{data}, 0) \quad X := \text{data} \langle 0 \rangle \quad Y := \text{data} \langle 1 \rangle$$

Funcion de interpolacion : $F(t) := \begin{cases} \text{linterp}(X, Y, t) & \text{if } t \leq T_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Graficacion de la excitacion :

$t := 0, 0.001.. T$



Cálculo de la respuesta usando transformada rápida de Fourier :

$mexp := 10$

$l := 0.. 2^{mexp} - 1$

$\Delta t := \frac{T}{2^{mexp}}$

$t_l := l \cdot \Delta t$

$V_l := F(t_l)$

$C := FFT(V)$

Cantidad de armonicas : $n := 100$

Coeficientes de Fourier :

$j := 0.. n$

$a1_j := 2 \cdot \text{Re}(C_j)$

$b1_j := -2 \cdot \text{Im}(C_j)$

Armado de la respuesta con los términos obtenidos con la FFT :

$$X_j := \frac{C_j}{m \cdot [-(j \cdot \omega)^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot n \cdot i \cdot j \cdot \omega + \omega n^2]}$$

	0
0	0.182
1	0.106-0.14i
2	-0.045-0.152i
3	-0.128-0.041i
4	-0.082+0.071i
5	0.022+0.082i
6	0.067+7.685i·10 ⁻³
7	0.024-0.051i
8	-0.036-0.035i
9	-0.041+0.019i
10	4.333·10 ⁻³ +0.04i
11	0.035+7.565i·10 ⁻³
12	0.017-0.029i
13	-0.02-0.023i
14	-0.027+0.011i
15	1.744·10 ⁻³ +0.026i

$C =$

KN

$t := 0 \cdot \text{seg}, \Delta t \cdot \text{seg}.. T \cdot \text{seg}$

$$x_2(t) := X_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^n \text{Re}(X_j \cdot e^{i \cdot j \cdot \omega \cdot t})$$

