# Decaimiento y decrecimiento logarítmico en sistemas de 1 grado de libertad.

**Reference:C:\ING\DYNAM\Teoria\unidades.mcd**

Iniciamos el análisis planteando la solucion homogenea para un sistema de ***1GL*** con amortiguación que es :

$$\boxed{x_H = e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \left( x_o \cdot \cos(w_r \cdot t) + \frac{Vo + Xo \cdot x \cdot w_n}{w_r} \cdot \text{sen}(w_r \cdot t) \right)}$$

Alternativamente podia escribirse :

$$\boxed{x_H = C \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \cos(w_r \cdot t - a)}$$

Donde la amplitud del movimiento es :

$$C = \sqrt{(Xo)^2 + \frac{(Vo + Xo \cdot x \cdot w_n)^2}{(w_r)^2}} \qquad \tan(a) = \frac{Vo + Xo \cdot x \cdot w_n}{w_r \cdot X_o}$$

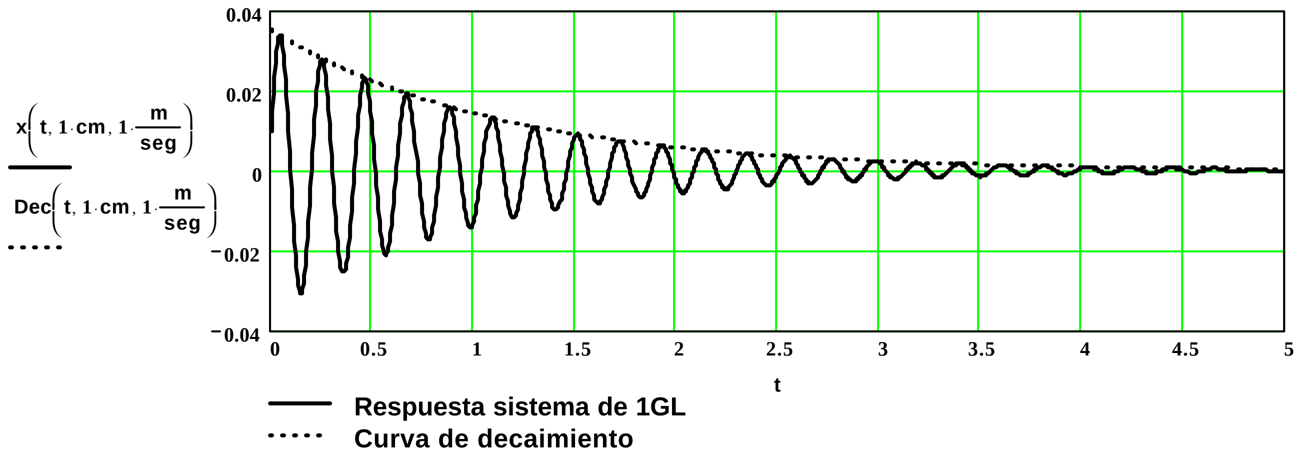
<u>Graficacion de la respuesta :</u>

Datos : $wn := 30 \cdot \frac{1}{seg} \qquad x := 0.03$

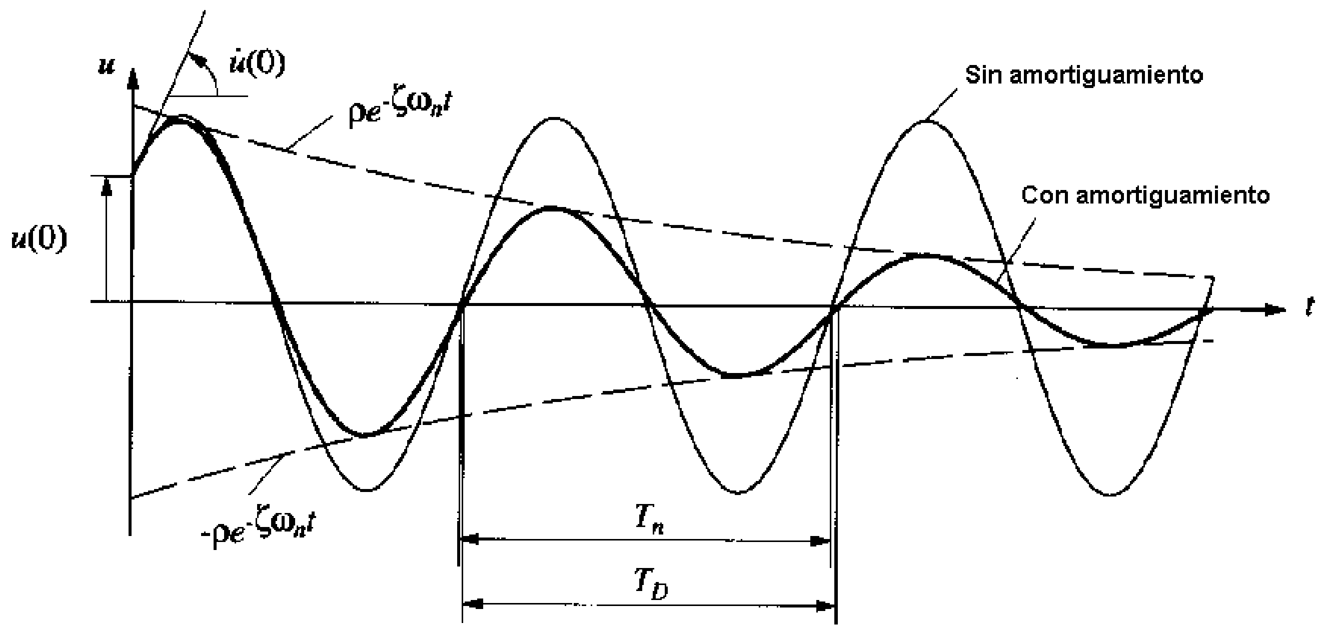
Iteración : $t := 0, 0.005 .. 5 \cdot seg$

$$\boxed{x(t, xo, Vo) := xo \cdot e^{-x \cdot wn \cdot t} \cdot \left( \cos\left(\sqrt{1 - x^2} \cdot wn \cdot t\right) + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1 - x^2} \cdot wn \cdot t\right) \right) + \frac{Vo \cdot e^{-x \cdot wn \cdot t}}{wn \cdot \sqrt{1 - x^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1 - x^2} \cdot wn \cdot t\right)}$$

$$\boxed{Dec(t, xo, Vo) := \sqrt{(xo)^2 + \frac{(Vo + xo \cdot x \cdot wn)^2}{\left(\sqrt{1 - x^2} \cdot wn\right)^2}} \cdot e^{-x \cdot wn \cdot t}}$$




La amplitud de desplazamientos del sistema sin amortiguación es la misma en todos los ciclos, pero el sistema con amortiguación oscila con amplitudes que decrecen en cada ciclo en forma exponencial respecto del tiempo.




**Efecto del amortiguamiento en vibraciones libres**

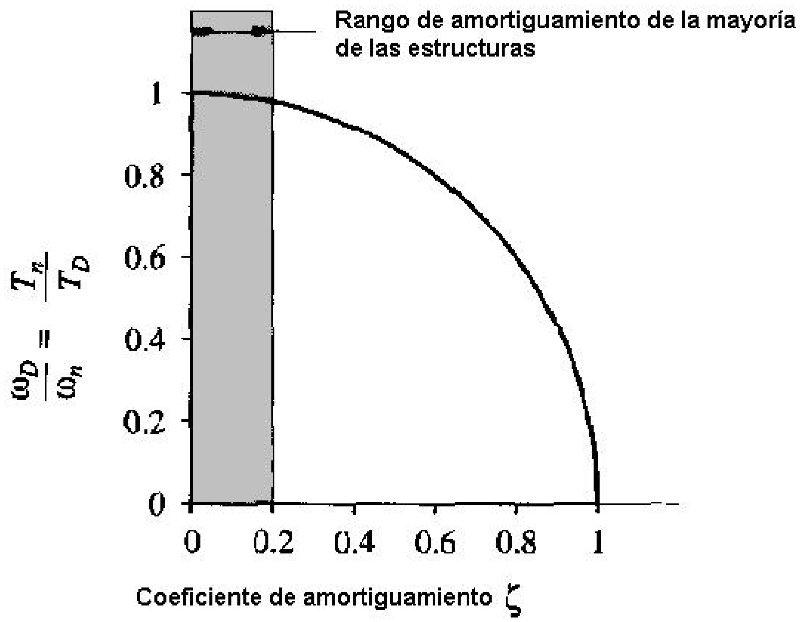
Las curvas envolventes están dadas por la expresión : $\boxed{\pm r \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t}}$

Donde

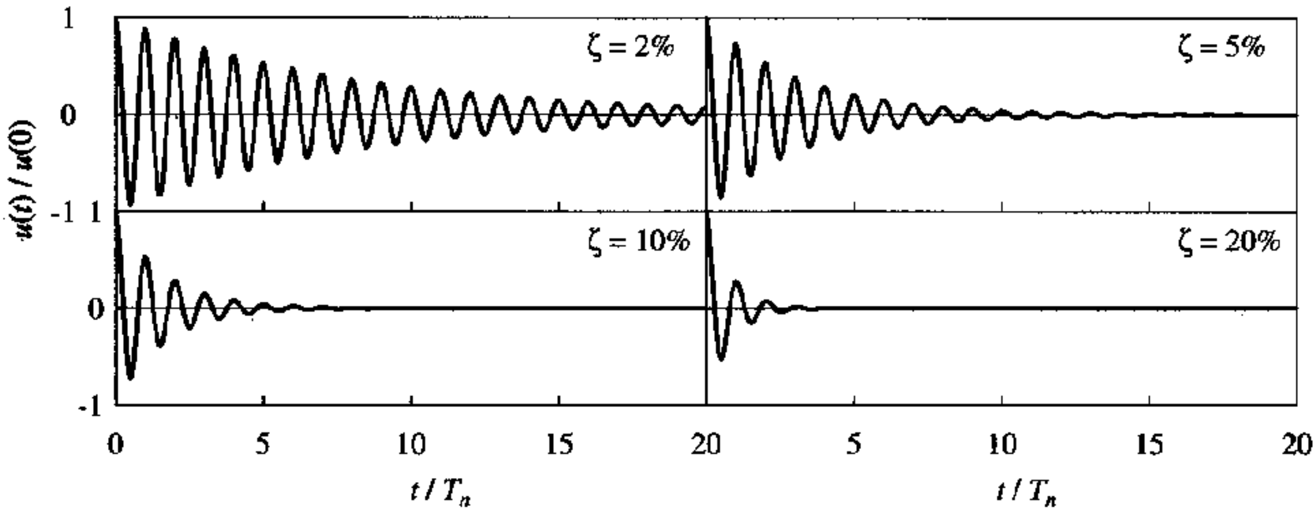
$$r = \sqrt{u(0)^2 + \left( \frac{\frac{du(0)}{dt} + x \cdot w_n \cdot u(0)}{w_n \cdot \sqrt{1 - x^2}} \right)}$$

Dichas envolventes tocan a la curva de desplazamientos, en puntos situados un infinitésimo a la derecha de las amplitudes máximas en cada ciclo.

El amortiguamiento hace disminuir la frecuencia natural desde el valor de $w_n$ a $w_R$ , y de alargar el período de vibración desde el valor de $T_n$ a $T_R$. Estos efectos son practicamente imperceptiles para coeficientes de amortiguación $x$ del orden del 20 % que es un rango en el que están comprendidas la mayoría de las estructuras, en las que los peridos y las frecuencias calculados sin amortiguamiento no difieren mucho si fueran calculados con amortiguameinto.




**Efecto del amortiguamiento en la frecuencia natural de vibración**



El efecto mas importante del amortiguamiento es la tasa de decaimiento de la oscilación libre. Esto se muestra en la figura anterior, donde la vibración libre producida por un desplazamiento inicial **u(o)** se grafica para cuatro sistemas que tienen el mismo período $T_n$ pero distintos coeficientes de amortiguamientos $\xi$ **= 2, 5, 10 y 20%**

Ahora analizamos la relacion entre las amplitudes de dos desplazamientos sucesivos en instantes t , y  t + Tr

Siendo $\boxed{T_r = \dfrac{2\cdot\pi}{\omega_n\cdot\sqrt{1-\xi^2}}}$ el ***periodo natural de vibracion con amortiguamiento***

$$\boxed{x_H(t) = C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}$$ En el instante t

$$\boxed{x_H(t+T_r) = C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot(t+T_r)}}$$ En el instante t + Tr

Dividiendo las amplitudes maximas nos queda :

$$\boxed{\frac{x_H(t)}{x_H(t+T_r)} = \frac{C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot(t+T_r)}} = e^{(\xi\cdot\omega_n\cdot T_r)} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

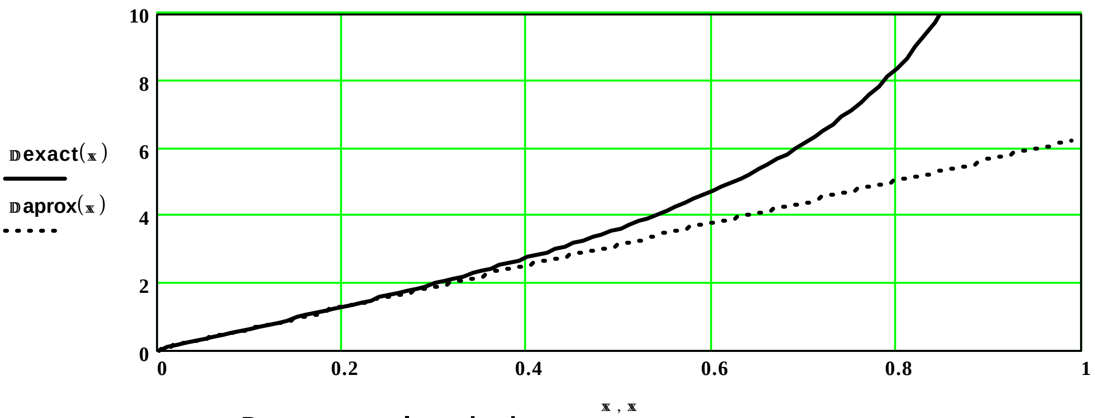
El logaritmo natural de esta relacion, se lo conoce por Decremento Logaritmico y se escribe como :

$$\boxed{\delta = \ln\left[\frac{x_H(t)}{x_H(t+T_r)}\right] = \ln\left[\frac{C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{C\cdot e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot(t+T_r)}}\right] = \xi\cdot\omega_n\cdot T_r = \frac{2\cdot\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Si el factor de amortiguamiento es pequeno, resulta $\sqrt{1-\xi^2}$ casi 1 y aproximadamente el decremento logaritmico es :

$$\boxed{\delta = 2\cdot\pi\cdot\xi}$$

$\xi := 0, 0.01 .. 0.99$ $\qquad \delta aprox(\xi) := 2\cdot\pi\cdot\xi$ $\qquad \delta exact(\xi) := \dfrac{2\cdot\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$




Decremento logaritmico exacto
Decremento Logaritmico aproximado