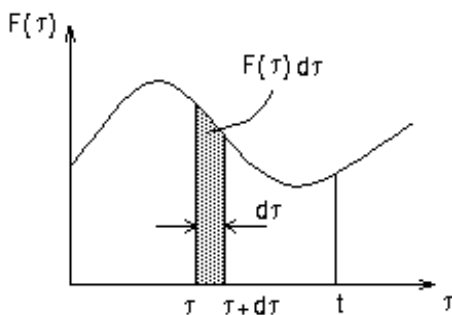


Respuesta a excitaciones dinámicas generales por Integral de Duhamel.

Respuesta a excitaciones dinámicas generales en sistemas sin amortiguación :

Una forma bien conocida para la solución de ecuaciones diferenciales lineales, como por ejemplo la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad, se basa en representar la fuerza aplicada como una secuencia de impulsos cortos infinitesimales. La respuesta del sistema en cada instante t para una fuerza aplicada $P(t)$, se obtiene sumando las respuestas de todos los impulsos infinitesimales en ese lapso de tiempo.



El impulso lo definimos como :

$$\boxed{m \cdot dV = F(t) \cdot dt}$$

Implica que el diferencial de velocidad se expresa por :

$$dV = \frac{F(t) \cdot dt}{m}$$

Ahora supongamos tener un oscilador simple sin amortiguación, cuya respuesta se expresa por :

$$\boxed{X = X_0 \cdot \cos(\omega_n t) + \frac{V_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n t)}$$

En esta ecuación introducimos el dV en lugar de V_0 , y el desplazamiento inicial $X_0 = 0$

$$dX(t) = 0 \cdot \cos(\omega_n t) + \frac{F(t) \cdot dt}{m \cdot \omega_n} \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)]$$

$$dX(t) = \frac{F(t) \cdot dt}{m \cdot \omega_n} \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)]$$

Se considera la excitación como una serie de impulsos cortos a intervalos $d\tau$

Entonces el desplazamiento total en el instante t resulta :

$$\boxed{X(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)] dt}$$

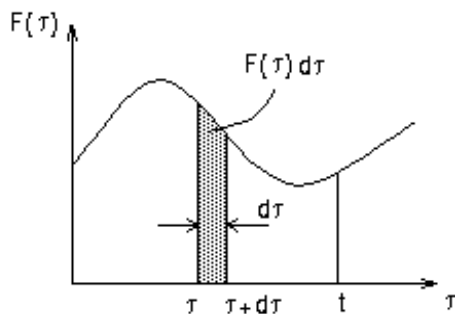
Integral de Duhamel

Esta ecuación representa el desplazamiento total producido por $F(\tau)$ aplicado a un oscilador simple sin amortiguación incluye ambos componentes del movimiento : **permanente** y **transitorio**

Para incluir el efecto del desplazamiento inicial X_0 y la velocidad inicial V_0 en instante $t = 0$ solo agregamos :

$$X(t) = X_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{V_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{1}{m \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)] d\tau$$

Respuesta a excitaciones dinámicas generales en sistemas con amortiguación :



El impulso lo definimos como :

$$m \cdot dV = F(t) \cdot dt$$

Implica que el diferencial de velocidad se expresa por :

$$dV = \frac{F(t) \cdot dt}{m}$$

Ahora supongamos tener un oscilador simple con amortiguación, cuya respuesta se expresa por :

$$X(t) = X_0 \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_D \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right) + \frac{V_0}{\omega_D} \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)$$

Donde : $\omega_D = \omega_n \cdot \sqrt{1 - x^2}$

En esta ecuación introducimos el dV en lugar de V_0 , y el desplazamiento inicial $X_0 = 0$

$$dX(t) = \frac{F(t) \cdot dt}{m \cdot \omega_D} \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)]$$

Se considera la excitación como una serie de impulsos cortos a intervalos $d\tau$

Entonces el desplazamiento total en el instante t resulta :

$$X(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)] d\tau$$

Integral de Duhamel en un sistema amortiguado en condiciones $X_0 = 0$ y $V_0 = 0$

Esta ecuación representa el desplazamiento total producido por $F(\tau)$ aplicado a un oscilador simple con amortiguación incluye ambos componentes del movimiento : **permanente** y **transitorio**

Para incluir el efecto del desplazamiento inicial X_0 y la velocidad inicial V_0 en instante $t = 0$ solo agregamos :

$$X(t) = X_0 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_D \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right) + \frac{V_0}{\omega_D} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \dots$$

$$+ \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t F(t) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)] dt$$

Respuesta a un impulso unitario :

Fuerzas impulsivas son aquellas que actúan en un lapso muy corto de tiempo. La figura muestra una fuerza $p(t) = 1/\epsilon$ cuyo tiempo de duración es ϵ comenzando en el instante $t = \tau$. A medida que ϵ se aproxima a cero la fuerza tiende al valor infinito. De todas maneras la magnitud del impulso definido por la integración en el tiempo de $p(t)$ permanece igual a 1. Una fuerza en el caso limite de ϵ casi cero, se llama **impulso unitario**.

La función **Delta de Dirac** $\delta(t - \tau)$ matemáticamente define un impulso unitario centrado en $t = \tau$.

De acuerdo a la segunda Ley de Newton del movimiento, si una fuerza p actúa sobre un cuerpo de masa m , la tasa de variación del momento del cuerpo es igual a la fuerza aplicada, esto es:

$$\frac{d}{dt} \left(m \cdot \frac{du}{dt} \right) = p$$

Siendo la masa constante, esta ecuación se traduce en :

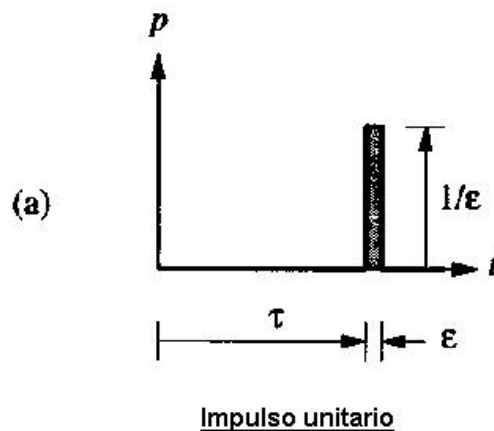
$$p = m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Integrando ambos miembros respecto de t se tiene entonces :

$$\int_{t_1}^{t_2} p dt = m \cdot (v_2 - v_1) = m \cdot \Delta v$$

$$v = \frac{du}{dt}$$

La integral de la parte izquierda de la ecuación es la **magnitud del impulso**. El producto de la masa por la velocidad es la **cantidad de movimiento**. La ecuación expresa que la magnitud de ambas son iguales.



La velocidad que se imparte a la masa m a partir de la aplicación de un impulso unitario resulta :

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{m}$$

siendo el desplazamiento cero antes y hasta la aplicación del impulso

$$u(t) = 0$$

Sustituyendo las dos condiciones anteriores en la expresión de los desplazamientos de un oscilador de un grado de libertad sin amortiguamiento, resulta

$$u(t) = u(t) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{v(t)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

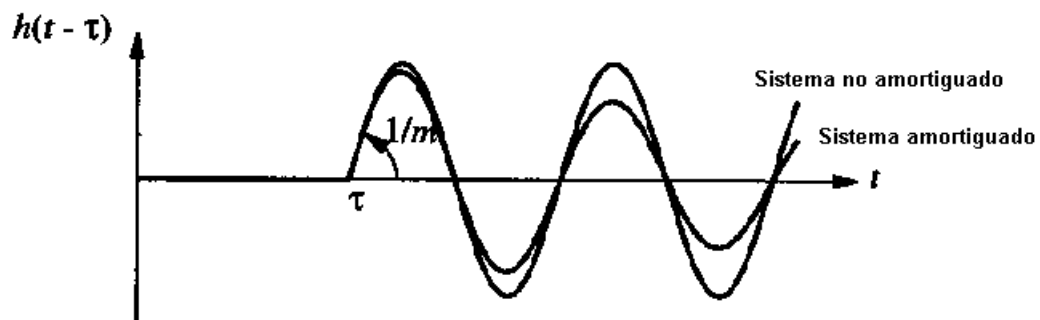
$$h(t - \tau) = u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_n} \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)]$$

$$t \geq \tau$$

Respuesta de sistemas sin amortiguación sometidos a un impulso unitario.

$$h(t - \tau) = u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot (t - \tau)} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)]$$

$$t \geq \tau$$



Respuesta a un impulso unitario

Respuesta a una fuerza representada por una función escalón :

Veamos el caso de una fuerza aplicada representada por una función escalón, que de repente toma el valor P_0 y se mantiene constante en ese valor a lo largo del tiempo. Vamos a determinar la respuesta de un sistema de un grado de libertad a partir del instante de aplicación de la carga.

$$F(t) = P_0$$

Partimos de la expresión general de la respuesta del sistema de 1GL sin amortiguamiento

$$u(t) = X_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{m \cdot \omega} \cdot \int_0^t F(t) \cdot \sin[\omega \cdot (t - \tau)] \, d\tau$$

Condiciones iniciales del análisis :

$$X_0 = 0$$

$$V_0 = 0$$

Con lo cual la expresión de la respuesta nos queda :

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t F(t) \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)] \, d\tau$$

Ahora reemplazamos la expresión de la fuerza y con las condiciones iniciales resolvemos la integral de Duhamel

$$u(t) = \frac{P_0}{m \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)] \, d\tau = \frac{P_0}{m \cdot \omega_n} \cdot \left[\frac{\cos[\omega_n \cdot (t - \tau)]}{\omega_n} \right] \Bigg|_0^t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \cdot (1 - \cos(\omega_n \cdot t))$$

Definiendo como **desplazamiento estático** a: $u_{ST} = \frac{P_0}{k}$ nos queda :

$$u(t) = u_{ST} \cdot (1 - \cos(\omega_n \cdot t))$$

Si analizamos la relación de desplazamientos $\frac{u(t)}{u_{ST}}$ respecto de la relación de tiempos $\frac{t}{T_n}$ vemos que el sistema oscila en su período natural de vibración pero respecto de un nuevo punto de equilibrio, correspondiente al desplazamiento estático u_{ST} y no a la posición de equilibrio original en $u = 0$.

El valor máximo del desplazamiento lo obtenemos diferenciando la expresión de la respuesta y con la condición que la velocidad sea cero :

$$\frac{d}{dt}u(t) = u_{ST} \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$0 = u_{ST} \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Los valores de t_0 o t que satisfacen esta condición son :

$$\omega_n \cdot t_0 = j \cdot \pi \quad \text{ó} \quad t_0 = \frac{j}{2} \cdot T_n$$

La ecuación de los desplazamientos, evaluada en $t = t_0$ nos da los valores máximos cuyo valor es :

$$u_0 = 2 \cdot u_{ST}$$

La conclusión es que una fuerza aplicada repentinamente al sistema, produce el doble de deformación que una fuerza aplicada en forma lenta y paulatina.

La respuesta de un **sistema de 1GL con amortiguamiento y sometido a la acción de una fuerza aplicada repentinamente** la calculamos usando la expresión de la integral de Duhamel para un sistema amortiguado

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t F(t) \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)] d\tau$$

siendo : $F(t) = P_0$

reemplazando y evaluando la integral obtenemos :

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t P_0 \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin[\omega_D \cdot (t - \tau)] dt$$

$$u(t) = u_{ST} \cdot \left[1 - e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_D \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right) \right]$$

Respuesta a una fuerza representada por una función lineal creciente :

En el caso de una fuerza aplicada $p(t)$ que crece linealmente en el tiempo, naturalmente no puede crecer en forma indefinida, pero nuestro análisis se centrará en el intervalo de tiempo en que $p(t)$ es lo suficientemente pequeña para que la fuerza del resorte esté dentro del límite elástico del mismo. La fuerza aplicada se expresa como :

$$p(t) = P_0 \cdot \frac{t}{t_r}$$

Sustituimos en la expresión de la integral de Duhamel para sistemas sin amortiguamiento y nos queda

$$u(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_n} \int_0^t \frac{P_0}{t_r} \cdot t \cdot \sin[\omega_n \cdot (t - \tau)] dt$$

Evaluando esta integral y simplificando se obtiene

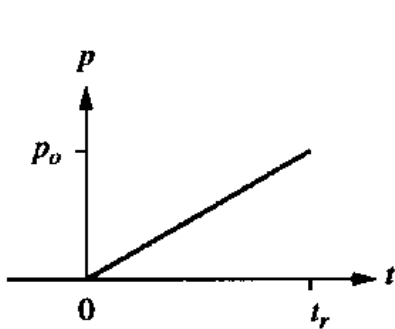
$$u(t) = u_{ST} \cdot \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin(\omega_n \cdot t)}{\omega_n \cdot t_r} \right)$$

donde la deformación estática debida a la fuerza P_0 es :

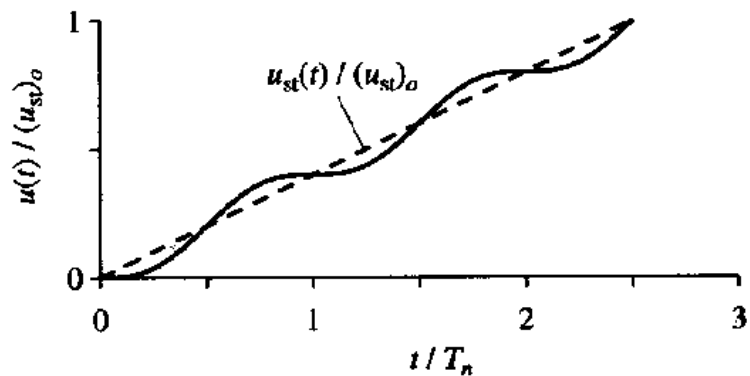
$$u_{ST} = \frac{P_0}{k}$$

A continuación planteamos la ecuación de los desplazamientos del sistema para una relación $\frac{t_r}{T_n} = 2.5$ donde también

la deformación estática en cada instante se expresa como $u_{ST} = \frac{p(t)}{k}$



Fuerza creciente linealmente

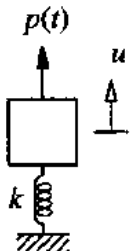


Respuesta estática y dinámica

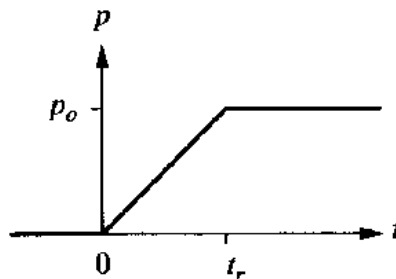
Como se ve en el gráfico, u_{ST} varía en el tiempo de la misma forma que $p(t)$ y las dos difieren por el factor de escala $\frac{1}{k}$. El sistema oscila en su período natural T_n alrededor de la solución estática

Respuesta a una fuerza con función lineal creciente hasta un valor constante:

Ahora consideramos el caso de una acción dinámica representada por una función lineal hasta el tiempo t_r y luego permanece constante en el tiempo, como indica la figura



Modelo de 1 GL



Acción dinámica

$$p(t) = \begin{cases} \left[P_0 \cdot \left(\frac{t}{t_r} \right) \right] & \text{if } t \leq t_r \\ P_0 & \text{if } t \geq t_r \end{cases}$$

La excitación tiene dos fases. Una de crecimiento y la otra constante en el tiempo

Para un sistema sin amortiguamiento partiendo del reposo, la respuesta durante la fase de crecimiento está dada por

$$u(t) = u_{ST} \cdot \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin(w_n \cdot t)}{w_n \cdot t} \right) \quad t \leq t_r$$

La respuesta durante la fase constante en el tiempo, puede ser determinada evaluando la Integral de Duhamel

$$u(t) = u(t_r) \cdot \cos[w_n \cdot (t - t_r)] + \frac{V(t_r)}{w_n} \cdot \sin[w_n \cdot (t - t_r)] + \frac{1}{m \cdot w_n} \cdot \int_{t_r}^t P(t) \cdot \sin[w_n \cdot (t - t_r)] dt$$

$$u(t) = u(t_r) \cdot \cos[w_n \cdot (t - t_r)] + \frac{V(t_r)}{w_n} \cdot \sin[w_n \cdot (t - t_r)] + u_{ST} \cdot [1 - \cos[w_n \cdot (t - t_r)]]$$

El tercer término de esta ecuación es la solución correspondiente a un sistema en reposo sujeto a una fuerza constante aplicada a partir de $t = t_r$

Los primeros dos términos de esta ecuación son la respuesta en vibración libre del sistema a partir del desplazamiento inicial $u(t_r)$ y la velocidad inicial $V(t_r)$ medidas al final de la fase de crecimiento.

Partiendo de la expresión de los desplazamientos calculados en el tiempo t_r :

$$u(t_r) = u_{ST} \cdot \left(1 - \frac{\sin(w_n \cdot t_r)}{w_n \cdot t_r} \right)$$

Derivando obtenemos la velocidad :

$$V(t_r) = u_{ST} \cdot \left[\frac{1}{t_r} - \frac{\cos(w_n \cdot t_r)}{t_r} + \frac{\sin(w_n \cdot t_r)}{[w_n \cdot (t_r)^2]} \right]$$

Reemplazamos en la ecuación de los desplazamientos y tenemos

$$u(t) = u_{ST} \cdot \left[\left[1 + \frac{1}{(w_n \cdot t_r)} \cdot [[1 - \cos[w_n \cdot (t - t_r)]] \cdot \sin[w_n \cdot (t - t_r)] - \sin(w_n \cdot t_r) \cdot \cos[w_n \cdot (t - t_r)]] \right] \right] \quad t \geq t_r$$

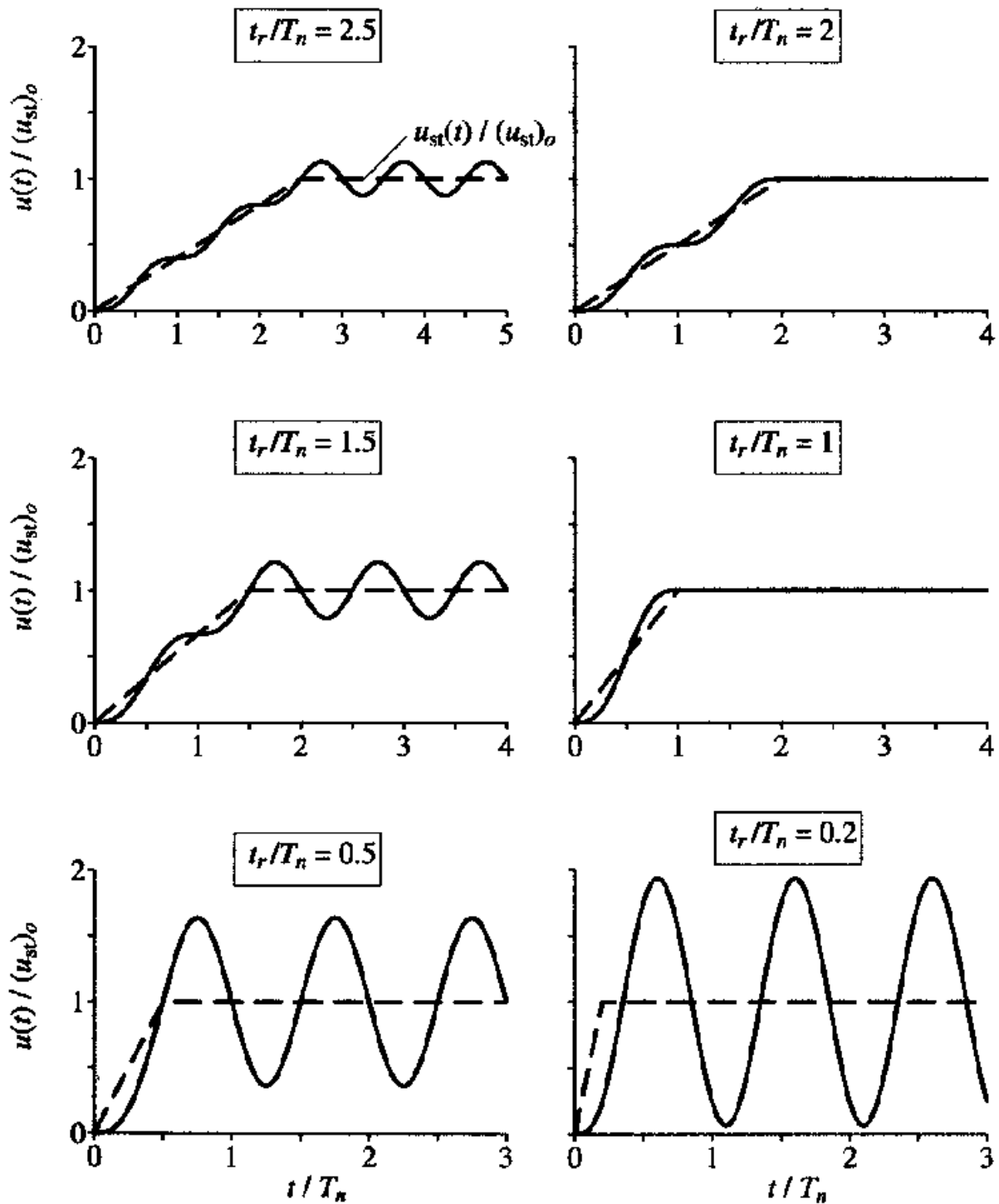
Esta ecuación puede simplificarse usando identidades trigonométricas nos queda

$$u(t) = u_{ST} \cdot \left[1 - \frac{1}{(w_n \cdot t_r)} \cdot [\sin(w_n \cdot t) - \sin[w_n \cdot (t - t_r)]] \right] \quad t \geq t_r$$

La deformación normalizada $\frac{u(t)}{u_{ST}}$ es una función del tiempo normalizado $\frac{t}{T_n}$, porque $w_n \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T_n} \right)$

En la figura se plotean los valores de $\frac{u(t)}{u_{ST}}$ respecto de $\frac{t}{T_n}$ para distintos valores de $\frac{t_r}{T_n}$. Cada ploteo es valido para

todas las combinaciones de t_r y T_n con la misma relación $\frac{t_r}{T_n}$.



Respuesta dinámica de sistemas de 1GL (solución estática en punteado)

Del análisis de los gráficos surgen las siguientes conclusiones :

- 1.- Durante la fase de crecimiento de la fuerza, el sistema oscila con el período natural T_n alrededor de la solución estática
- 2.- Durante la fase de fuerza constante, el sistema también oscila con T_n alrededor de la solución estática
- 3.- Si la velocidad $V(t_r)$ es cero al final de la fase de crecimiento de la fuerza, el sistema no vibra después en la fase de fuerza constante
- 4.- Para valores pequeños de la relación $\frac{t_r}{T_n}$ la respuesta es similar a la de un impulso.
- 5.- Para valores grandes de la relación $\frac{t_r}{T_n}$, los desplazamientos dinámicos oscilan cerca de la solución estática, implicando que los efectos dinámicos son pequeños.

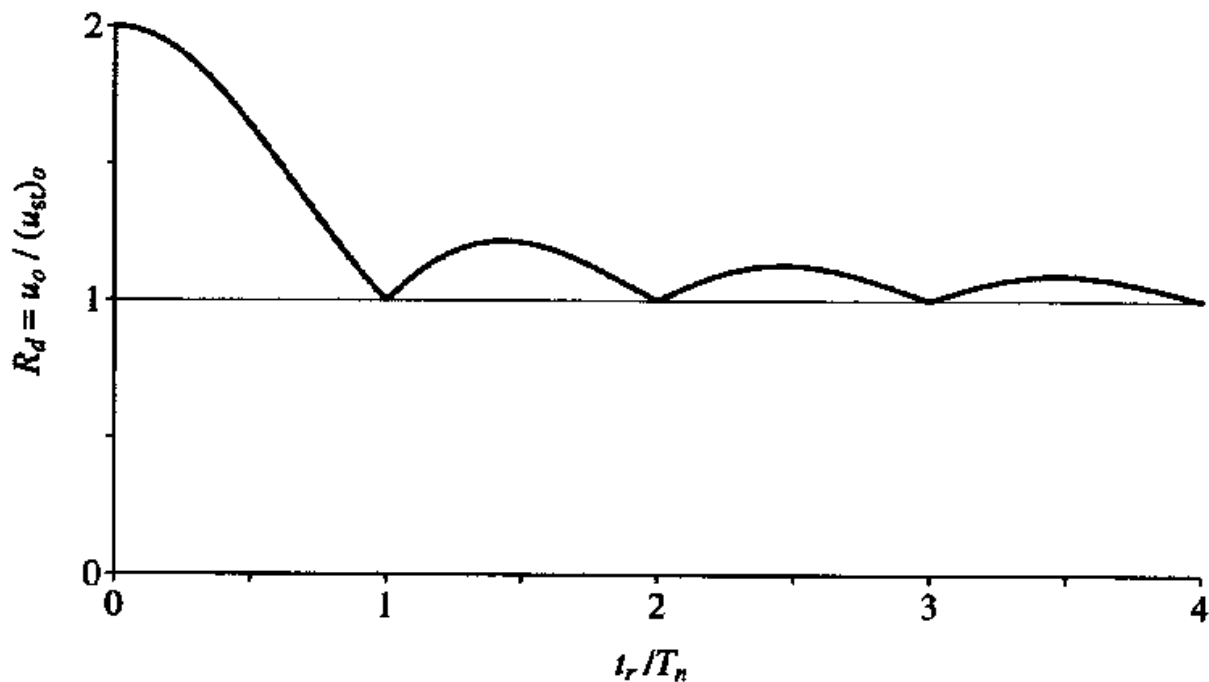
El máximo valor de la deformación se alcanza durante la fase de fuerza constante y esta dado por

$$u_0 = u_{ST} \left[1 + \frac{1}{(w_n \cdot t_r)} \cdot \sqrt{(1 - \cos(w_n \cdot t_r)) + (\sin(w_n \cdot t_r))^2} \right]$$

Usando identidades trigonometricas y el período natural $T_n = \frac{2 \cdot p}{w_n}$ la expresión puede simplificarse como

$$Rd = \frac{u_0}{u_{ST}} = 1 + \frac{\left| \sin\left(\frac{p \cdot t_r}{T_n}\right) \right|}{\frac{p \cdot t_r}{T_n}}$$

Este factor depende solamente de $\frac{t_r}{T_n}$. La representación grafica de esta relación es el espectro de respuesta para esa acción dinámica. Este espectro de respuesta caracteriza el problema totalmente. En este caso contiene información sobre la máxima respuesta normalizada $\frac{u_0}{u_{ST}}$ para todos los sistemas de 1 grado de libertad sin amortiguamiento, para esa excitación con máximo valor P_0 y duración t_r .



Espectro de respuesta para excitación con fase lineal y fase constante

Del análisis de este espectro de respuesta, pueden extraerse las siguientes conclusiones :

- 1.- Si $t_r < \frac{T_n}{4}$, resulta $u_0 = 2 \cdot u_{ST}$ esto implica que la estructura ve esta excitación como una fuerza aplicada repentinamente.
- 2.- Si $t_r > 3 \cdot T_n$, resulta $u_0 = u_{ST}$ esto implica que la excitación es como una fuerza estática.
- 3.- Si $\frac{t_r}{T_n} = 1, 2, 3, \dots$, resulta $v(t_r) = 0$ al final de la fase de crecimiento, lo que hace que el sistema no oscile después en la fase de fuerza constante.

