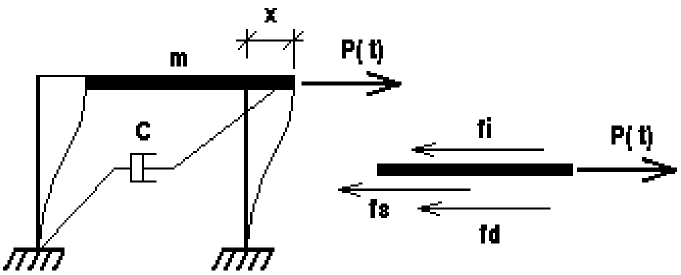
Ecuaciones de equilibrio dinámico para algunos sistemas simples y resolucion por Transformada de Laplace

Reference:C:\ING\unidades.mcd

Caso de excitacion fuerza P(t) exterior :



I = inertia
S=Stiffness
D=Damping

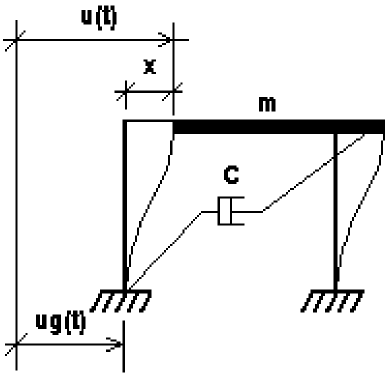
$$P(t) - f_I - f_D - f_S = 0$$

$$f_I + f_D + f_S = P(t)$$

$$\boxed{m\,x + c\,x + k\,x = P(t)}$$

Caso de movimiento de la base :

$$\boxed{u(t) = u_g(t) + x(t)}$$



$$f_I + f_D + f_S = P(t)$$

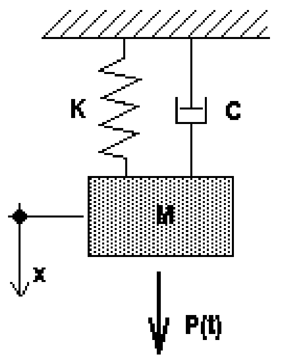
$$m\,\frac{d^2u(t)}{dt^2} + c\,\frac{d\,x(t)}{dt^2} + k\,x(t) = 0$$

$$m\left(\frac{d^2u_g(t)}{dt^2} + \frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) + c\,\frac{d\,x(t)}{dt^2} + k\,x(t) = 0$$

$$\boxed{m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\,\frac{d\,x(t)}{dt^2} + k\,x(t) = -m\,\frac{d^2u_g(t)}{dt^2}}$$

Donde $\boxed{P_{eff} = -m\,\frac{d^2u_g(t)}{dt^2}}$ es la ***fuerza sismica efectiva.*** (proporcional a la masa)

Caso de oscilador simple amortiguado con excitacion P(t) :



Ecuacion diferencial del movimiento :

$$\boxed{m\,x + c\,x + k\,x = P(t)}$$

Dividiendo por la masa nos queda :

$$x + \frac{c}{m}\,x + \frac{k}{m}\,x = \frac{P(t)}{m}$$

Definimos las siguientes relaciones :

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ **Frecuencia natural de vibracion**

$C_C = 2m\omega_n$ **Constante critica de amortiguamiento**

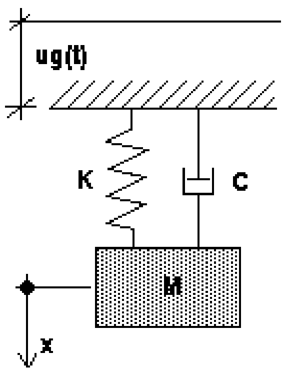
$\dfrac{K}{m} = \omega_n^{\,2}$

$\zeta = \dfrac{C}{C_C}$ **Coeficiente de amortiguamiento**

Expresamos el coeficiente de amortiguamiento como : $C = C_C\zeta = 2m\,\omega_n\zeta$

$$\boxed{x + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^{\,2}\,x = \frac{P(t)}{m}}$$

Caso de oscilador simple amortiguado con movimiento de base :



$$m\,x + c\,x + k\,x = -m\,\frac{d^2u_g(t)}{dt^2}$$

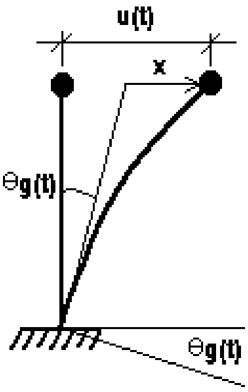
Dividiendo por la masa nos queda :

$$x + \frac{C}{m}x + \frac{K}{m}\,x = -\frac{d^2u_g(t)}{dt^2}$$

Con los mismos reemplazos anteriores :

$$\boxed{x + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^{\,2}\,x = -\frac{d^2u_g(t)}{dt^2}}$$

Caso de excitacion rotacional de la base :



$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2}+c\,x+k\;x(t)=0$$

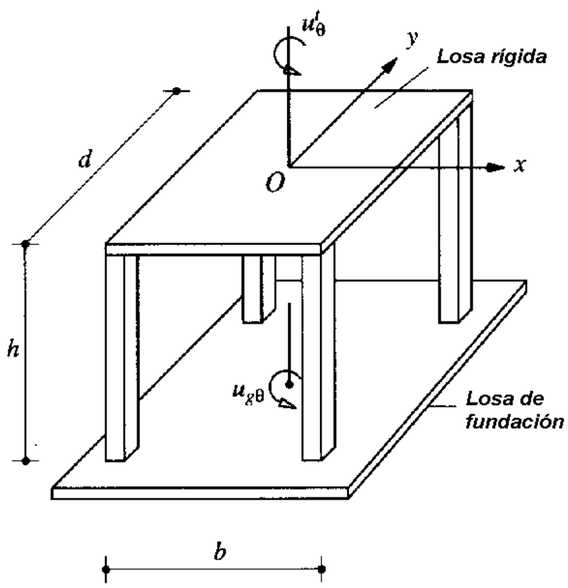
$$u(t)=h\,\theta_g(t)+x(t)$$

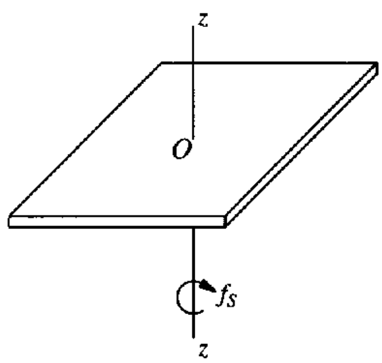
$$m\frac{d^2\left(h\,\theta_g(t)+x(t)\right)}{dt^2}+c\,x+k\;x(t)=0$$

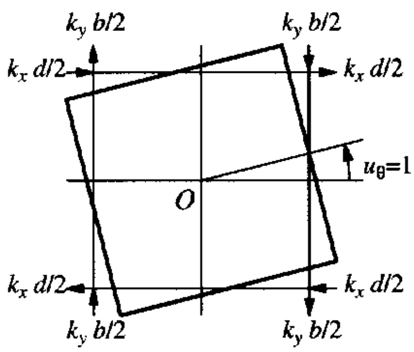
$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\,x+k\;x(t)=-m\;h\;\frac{d^2\theta_g(t)}{dt^2}}$$

Donde $\boxed{P_{eff}=-m\;h\;\dfrac{d^2\theta_g(t)}{dt^2}}$ es la **fuerza sismica efectiva.**

Caso de excitación torsional de la base :







El momento torsor que actúa sobre la masa se expresa de acuerdo a la segunda Ley de Newton como :

$$-f_S=I_0\;u_\theta^t$$

Donde : $\boxed{u_{\theta}^{t}(t) = u_{\theta}(t) + u_{g\theta}(t)}$

u_{θ} = ***rotación de la fundación relativa al suelo***

$$I_0 = \frac{m\,(b^2 + d^2)}{12}$$ ***Momento de inercia respecto del centro de masa O***

Relación entre momento torsor y rotación relativa :

$f_S = k_{\theta}\, u_{\theta}$ $\qquad$ k_{θ} = ***rigidez torsional***

Para columnas con sus dos extremos empotrados, las rigideces resultan :

$$k_X = \frac{12\, EJ_Y}{h^3}$$

$$k_Y = \frac{12\, EJ_X}{h^3}$$

Para determinar la rigidez a torsión se introduce una rotación unitaria : $u_{\theta} = 1$

$$\boxed{k_{\theta} = 4\left(k_X \frac{d}{2}\frac{d}{2}\right) + 4\left(k_Y \frac{b}{2}\frac{b}{2}\right) = k_X d^2 + k_Y b^2}$$ Rigidez torsional

La expresión de la ecuación de equilibrio dinámico resulta :

$$\boxed{I_0 \ddot{u}_{\theta} + (k_X d^2 + k_Y b^2) u_{\theta} = -I_0 \ddot{u}_{g\theta}}$$

Resolucion de la ecuacion diferencial de equilibrio dinamico mediante Transformadas de Laplace

Partimos de la ecuacion de equilibrio dinamico :

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = P(t)}$$

Aplicamos Transformada de Laplace a ambos miembros :

$$L\left(m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x\right) = L\left(P(t)\right)$$

Desarrollando :

$$s^2 \tilde{x}(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0) + 2\zeta\omega_n\left[s\,\tilde{x}(s) - x(0)\right] + \omega_n{}^2\,\tilde{x}(s) = \tilde{f}(s)$$

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^{\,2}\right)\tilde{x}(s) = \tilde{f}(s) + \left(s + 2\zeta\omega_n\right)x(0) + \dot{x}(0)$$

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^{\,2}$$

$$\boxed{\tilde{x}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^{\,2}}\left[\tilde{f}(s) + \left(s + 2\zeta\omega_n\right)x(0) + \dot{x}(0)\right]}$$

Llamamos :

$$s_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \qquad s_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}\tilde{f}(s) + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s - s_1)(s - s_2)}x(0) + \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}\dot{x}(0)$$

$$\boxed{x(t) = \int_0^t \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} f(t - \tau)\,d\tau + \left[\frac{s_2 e^{s_2 t} - s_1 e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} + 2\zeta\omega_n \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\right]x(0) + \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\dot{x}(0)}$$

Teniendo en cuenta :

$$s_2 - s_1 = -2\,\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}\,Sh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t\right)$$

$$\frac{s_2 e^{s_2 t} - s_1 e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} = e^{-\zeta\omega_n t}\left[Ch\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}Sh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n t\right)\right]$$

Reemplazamos en la solucion ***x(t)*** y nos queda finalmente :

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n t}\, Sh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\;\omega_n\tau\right) f(t-\tau)\, d\tau}_{\text{SOLUCION PARTICULAR VIBRACIONES FORZADAS}} +$$

$$\underbrace{+\, x(0)\, e^{-\zeta\omega_n t}\left[Ch\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\;\omega_n t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} Sh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\;\omega_n\tau\right)\right] + x(0)\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} Sh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\;\omega_n\tau\right)}_{\text{SOLUCION HOMOGENEA VIBRACIONES LIBRES}}$$