Transformadas de Laplace

Definicion de Transformada de Laplace :

$$L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \underset{\sim}{x}(s)$$

Condicion necesaria para que la integral converja :

$$\lim_{t \to \infty} \left[x(t)\ e^{-st} \right] = 0$$

Transformada de la suma :

$$L\{c_1 x_1(t) + c_2\, x_2(t)\} = c_1\, L\{x_1(t)\} + c_2\, L\{x_2(t)\}$$

Transformada de una constante :

$$L\{c\} = \frac{c}{s}$$

Transformada de la unidad :

$$L\{1\} = \frac{1}{s}$$

Transformada de la derivada :

$$L\{x(t)\} = -x(0) + s\ \underset{\sim}{x}(s)$$

Transformada de la variable t :

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Transformada del cuadrado de una variable :

$$L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Transformada de la derivada n-esima :

$$L\left\{ x^{(n)}(t) \right\} = s^n\ \underset{\sim}{x}(s) - s^{n-1}\ x(0) - s^{n-2}\ x(0) - \ldots - \overset{(n-1)}{x}(0)$$

Transformada de t^n ***:***

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Transformada de e^{at} ***:***

$$L\{e^{at}\} \frac{1}{s-a}$$

Transformada del seno :

$$L\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Transformada de una integral :

$$L\left\{ \int_a^t x(t)\ dt \right\} = \frac{1}{s}\ \underset{\sim}{x}(s) + \frac{1}{s} \int_0^a x(t)\ dt$$

Antitransformadas de Laplace

Definicion de Antitransformada : $\boxed{L^{-1}\{x(s)\} = x(t)}$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}}$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}}$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right\} = \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}}$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)}\right\} = \frac{s_2 e^{s_2 t} - s_1 e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}}$$

Teorema de Convolucion :

$$\boxed{L^{-1}\left\{\tilde{f}(s)\ \tilde{g}(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)\ g(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)\ d\tau}$$

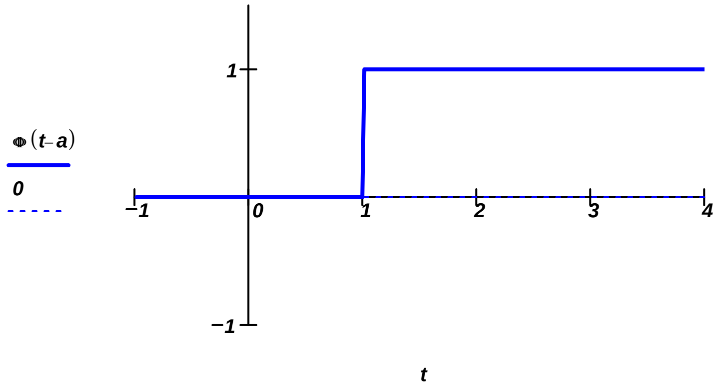
Donde las funciones son : $\begin{cases} \tilde{f}(s) = L\{f(t)\} \\ \tilde{g}(s) = L\{g(t)\} \end{cases}$

Funcion Salto :

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & para\ \ t < a \\ 1 & para\ \ t \geq a \end{cases}$$

para : $a := 1$

$$\boxed{L\{U(t-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s}}$$



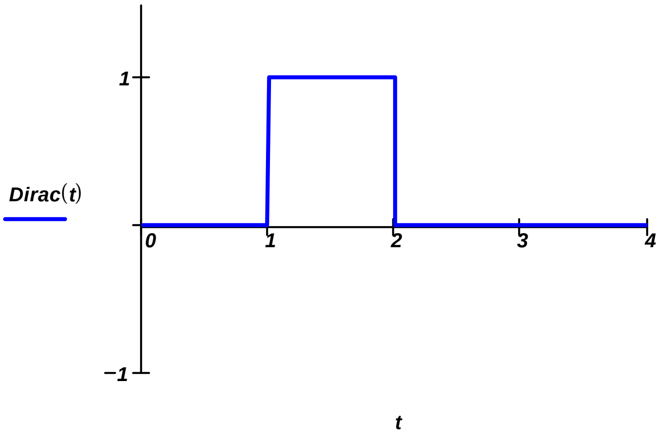
Grafica de funcion Salto

Funcion Delta de Dirac (salto) :

para : $\varepsilon := 1$

$$Dirac(t) := \begin{cases} \Phi(t-a) & \text{if } t \le a+\varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1/\varepsilon & \text{para } a \le t \le a+\varepsilon \\ 0 & \text{para } a+\varepsilon < t \end{cases}$$



Funcion Delta de Dirac

Funcion Impulso :

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta(t-a)$$

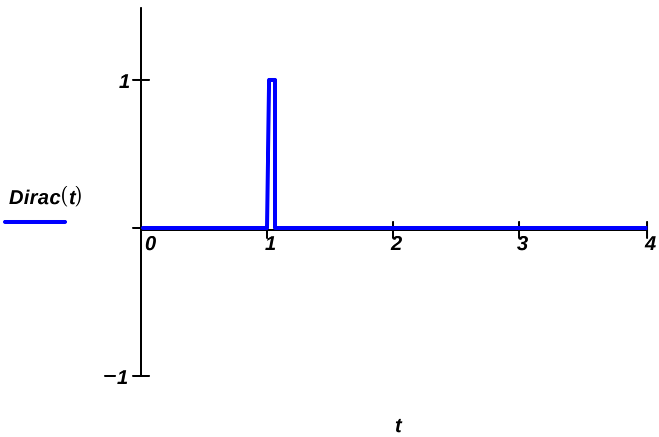
para : $\varepsilon := 0.05$

$$Dirac(t) := \begin{cases} \Phi(t-a) & \text{if } t \le a+\varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t-a)\, dt = 1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1 \ , \quad -\infty \le a \le \infty}$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1 \ , \ a > 0}$$



Funcion Impulso

Propiedad de la funcion impulso :

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} f(t)\ \delta(t-a)\, dt = \int_{a}^{a+\varepsilon} f(t)\ \delta(t-a)\, dt = f(a) \int_{a}^{a+\varepsilon} \delta(t-a)\, dt = f(a)}$$

Transformada de la funcion impulso :

$$\boxed{L\{\delta(t-a)\} = e^{-sa}}$$

Transformada de la funcion Salto :

$$\boxed{L\{U(t-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s}}$$

Relacion entre las dos transformadas :

$$\boxed{L\{\delta(t-a)\} = s\, L\{U(t-a)\}}$$

recordando la expresion de la transformada de la derivada

$$\boxed{L\{\dot{x}(t)\} = -x(0) + s\, \tilde{x}(s)}$$

Por comparacion siendo x(0) = 0 la funcion impulso es la derivada de la funcion escalon (esto es formal ya que la funcion escalon no es derivable)

Otra propiedad util :

$$L^{-1}\{F(s)\, e^{-sa}\} = \underbrace{\int_0^x f(x-a)\,\delta(\xi-a)\,d\xi}_{TEOREMA\ DE\ CONVOLUCION} = \begin{cases} 0\ ,\ x<a \\ f(x-a)\ ,\ x \geq a \end{cases}$$

$$\boxed{L^{-1}\{F(s)\, e^{-sa}\} = f(x-a)\, U(x-a)}$$

Caso general de resolucion de la ecuacion diferencial de teoria de vigas :

Ecuacion diferencial :

$$\boxed{w^{IV} = \frac{P(x)}{B}}$$

Aplicamos transformada a ambos miembros :

$$L\{w^{IV}\} = L\left\{\frac{P(x)}{B}\right\}$$

$$s^4\, w(s) - s^3\, w(0) - s^2\, w'(0) - s\, w''(0) - w'''(0) = \frac{1}{B}\, P(s)$$

$$\boxed{w(s) = \frac{1}{B}\frac{P(s)}{s^4} + \frac{1}{s}\, w(0) + \frac{1}{s^2}\, w'(0) + \frac{1}{s^3}\, w''(0) + \frac{1}{s^4}\, w'''(0)}$$

Para calcular ***w(x)*** aplicamos antitransformada teniendo en cuenta :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$L^{-1}\{P(s)\} = p(x)$$

$$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^x f(x-\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^x f(\varepsilon)\,g(x-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

Por lo tanto : $w(x) = L^{-1}\{w(s)\}$

$$w(x) = \underbrace{\int_0^x \frac{1}{B}\frac{(x-\varepsilon)^3}{3!} P(\varepsilon)\,d\varepsilon}_{\text{SOLUCION PARTICULAR}} + \underbrace{w(0) + x\,w'(0) + \frac{x^2}{2}\,w''(0) + \frac{x^3}{6}\,w'''(0)}_{\text{SOLUCION HOMOGENEA ASOCIADA}}$$

$$w(x) = \int_0^x \frac{1}{B}\frac{\varepsilon^3}{3!} P(x-\varepsilon)\,d\varepsilon + w(0) + x\,w'(0) + \frac{x^2}{2}\,w''(0) + \frac{x^3}{6}\,w'''(0)$$