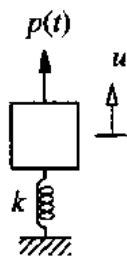


Vibraciones amortiguadas de sistemas de un grado de libertad con excitación armónica.

☞ Reference:C:\Inglunidades.mcd

Se estudiará el modelo formado por una masa m , un resorte de constante K y un amortiguador de constante C sometido a una fuerza perturbadora senoidal de amplitud P_0 y pulsación ω . De acuerdo a lo visto, los parámetros del sistema son :



Modelo de 1 GL

Frecuencia natural

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Frecuencia natural con amortiguamiento

$$w_r = w_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Coefficiente de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 \cdot m \cdot w_n}$$

La ecuación diferencial del movimiento es :

$$m \cdot \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right) + C \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + K \cdot x = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dividimos por la masa m nos queda :

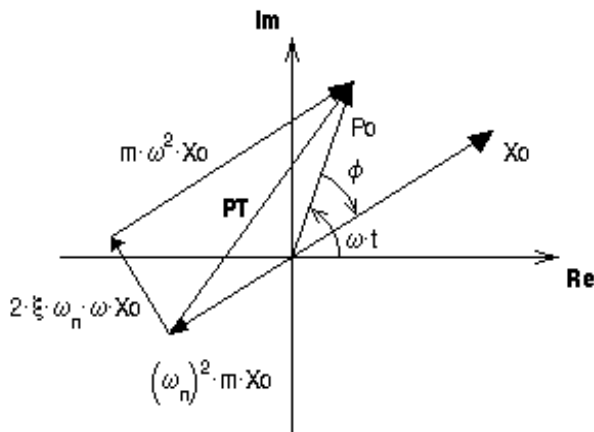
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{C}{m} \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Reemplazando por los parametros correspondientes nos queda :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \zeta \cdot w_n \cdot \frac{dx(t)}{dt} + (w_n)^2 \cdot x = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

En el modelo de vibraciones forzadas sin amortiguamiento, la solución senoidal para x estaba en fase (o en oposición) con la fuerza perturbadora. La fuerza de inercia (derivada segunda de la solución) también estaba en fase u oposición con la fuerza perturbadora.

Suponiendo para este caso una solución senoidal con pulsación igual a la de la derivada primera de esa solución, o sea la fuerza ejercida por el amortiguador, esta adelantada en $\pi/2$ respecto de la fuerza ejercida por el resorte. Por lo tanto, la solución no puede estar en fase con P_0 pues en ese caso la fuerza debida al amortiguamiento quedaría sin equilibrar.



Solución no factible :

$$x = X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Fuerza del resorte :

$$-k \cdot x = -m \cdot (\omega_n)^2 \cdot X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Fuerza del amortiguador :

$$-C \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \omega_n \cdot X_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Fuerza de inercia :

$$-m \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) = m \cdot \omega^2 \cdot X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Por lo tanto la solución $x(t)$ debe estar atrasada un cierto ángulo ϕ respecto de $P(t)$, para que una componente de ésta equilibre a la fuerza del amortiguador.

La solución que planteamos es del tipo : $x(t) = X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - f)$

Desarrollando se tiene : $x(t) = X_0 \cdot (\cos(f) \cdot \sin(\omega \cdot t) - \sin(f) \cdot \cos(\omega \cdot t))$

Ahora si llamamos : $C = X_0 \cdot \cos(f)$

$D = -X_0 \cdot \sin(f)$

La expresión de los desplazamientos nos queda : $x(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t) + D \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Calculamos sus derivadas : $\frac{d}{dt}x(t) = C \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - D \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -C \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - D \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Reemplazamos en la ecuación diferencial :

$$(-C \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - D \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + 2 \cdot \omega \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot (C \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - D \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)) +$$

$$(\omega_n)^2 \cdot (C \cdot \sin(\omega \cdot t) + D \cdot \cos(\omega \cdot t)) = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

+

$$\begin{aligned} & [(-C \cdot \omega^2 - 2 \cdot x \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot D) + (\omega_n)^2 \cdot C] \cdot \sin(\omega \cdot t) + [-D \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_n \cdot x \cdot C + (\omega_n)^2 \cdot D] \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ & = \frac{P_o}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

$$\boxed{[(\omega_n)^2 - \omega^2] \cdot C - 2 \cdot x \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot D] \cdot \sin(\omega t) + [[(\omega_n)^2 - \omega^2] \cdot D + 2 \cdot x \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot C] \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{P_o}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Para que esta ecuación sea válida para todo t , los coeficientes de los términos en seno y coseno en los dos lados de la ecuación deben ser iguales. Este requerimiento hace que tengamos 2 ecuaciones con 2 incógnitas C y D .

Dividiendo por ω_n^2 y teniendo en cuenta la relación $K = \omega_n^2 \cdot m$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} & \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \cdot C - \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right) \cdot D = \frac{P_o}{K} \\ & \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \cdot D + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right) \cdot C = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos :

$$C = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad D = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{-2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Por lo tanto la solución en régimen permanente resulta :

$$\boxed{x_{perm}(t) = \frac{P_o}{K} \left[\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{-2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right]}$$

Graficando los resultados obtenidos se tiene :

$$P_o := 100 \cdot \text{kg} \quad K := 10 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad \omega_n := 20 \cdot \frac{1}{\text{seg}} \quad \omega := 10 \cdot \frac{1}{\text{seg}} \quad x := 0.1 \quad X_o := 0 \cdot \text{cm} \quad V_o := \frac{\omega_n \cdot P_o}{K}$$

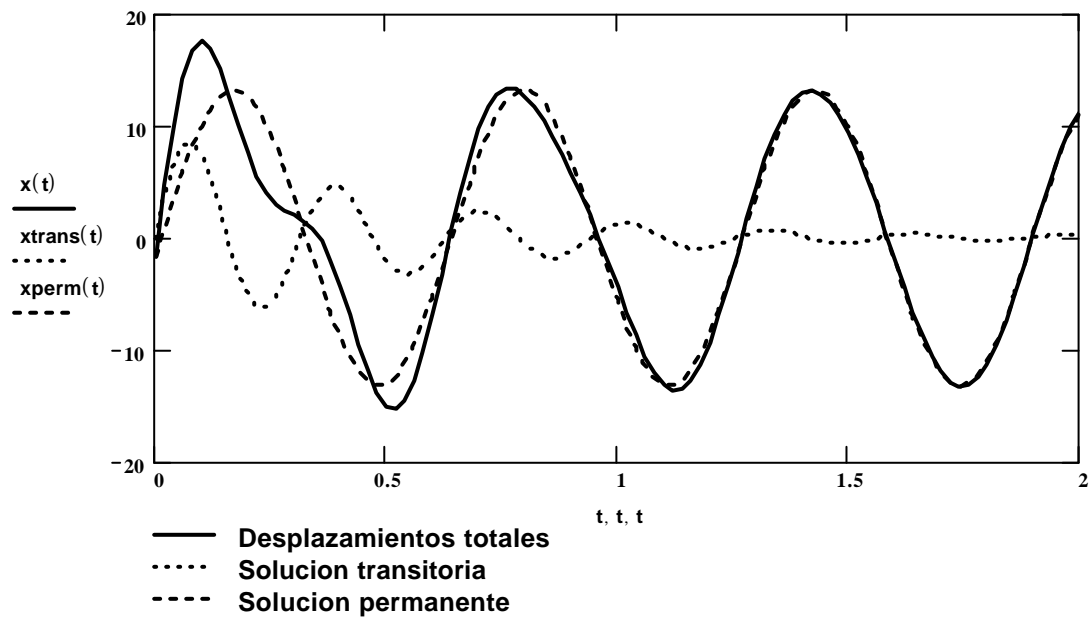
$$t := 0, 0.02 \cdot \text{seg} .. 2 \cdot \text{seg}$$

$$\omega_r := \omega_n \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$x_{\text{perm}}(t) := \frac{P_o}{K} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{-2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right]$$

$$x_{\text{trans}}(t) := X_o \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_r \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sin(\omega_r \cdot t) \right) + \frac{V_o}{\omega_r} \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$x(t) := x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{perm}}(t)$$



Calculo de la amplitud del movimiento :

Para calcular la amplitud X_o partimos de la expresion de la solucion en regimen permanente :

$$x_{perm}(t) := \frac{P_o}{K} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2} \cdot \sin(w \cdot t) + \frac{-2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2} \cdot \cos(w \cdot t) \right]$$

$$X_o = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{\left(\frac{P_o}{K}\right)^2 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2} \right]^2 + \left[\frac{-2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2} \right]^2}$$

$$X_o = \frac{P_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}} \quad \text{Amplitud del movimiento}$$

Calculo del coeficiente de Amplificacion Dinamica :

Para calcular el **factor de amplificacion dinamica** partimos de la expresion de la amplitud

$$X_o = \frac{P_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}} \quad X_o = \frac{P_o}{\left[\frac{K}{(w_n)^2}\right]} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}}$$

El corrimiento estatico del resorte es $d = \frac{P_o}{K}$

Este **factor de amplificacion dinamica** se define como la relacion entre la amplitud de la deformacion dinamica, y la amplitud de la deformacion estatica debida a la carga P_o .

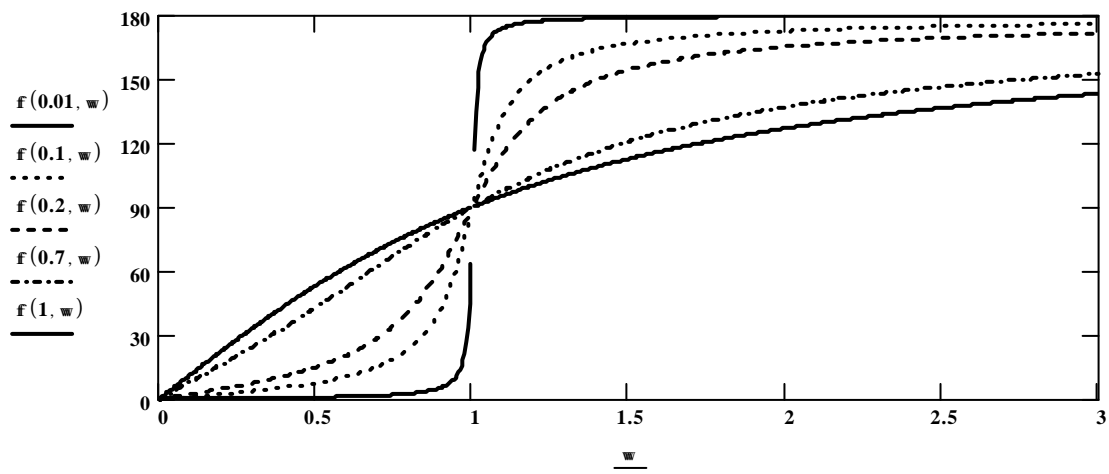
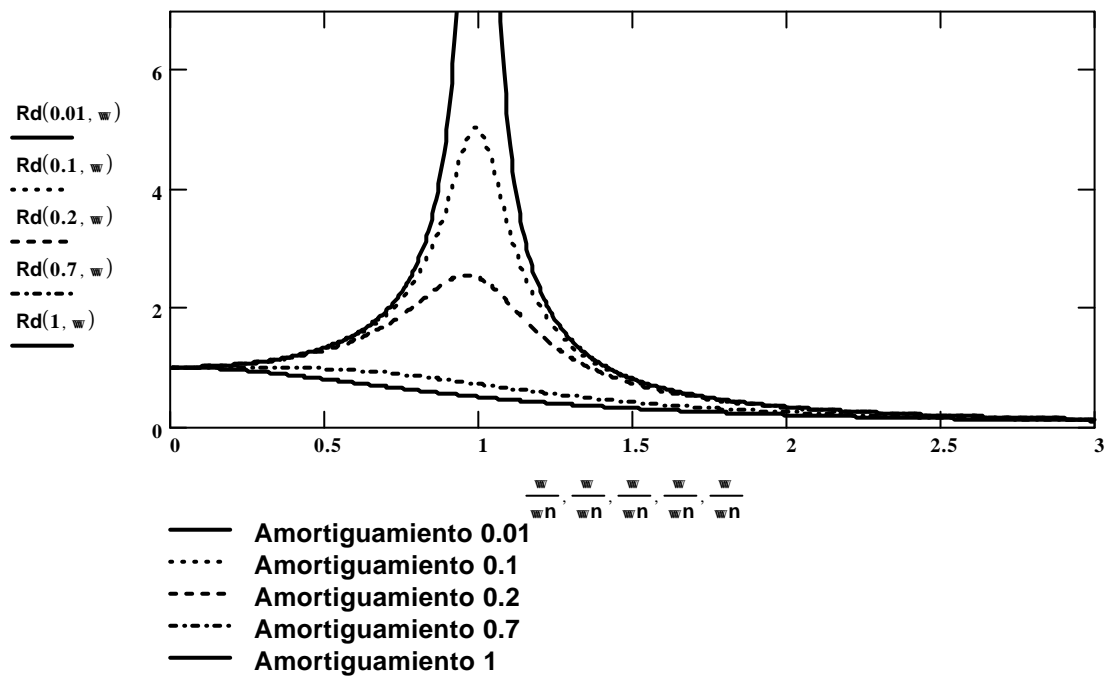
$$R_d = \frac{X_o}{d} \quad R_d = \frac{(w_n)^2}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}}$$

$$R_d(x, w) := \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2}} \quad \text{Factor de Amplificacion Dinamica}$$

$w := 0, 0.1.. 60$

$$f(x, w) := \begin{cases} \left[\operatorname{atan} \left[\frac{2 \cdot x \cdot \frac{w}{wn}}{1 - \left(\frac{w}{wn} \right)^2} \right] \right] \cdot \frac{360}{2 \cdot p} & \text{if } w \leq wn \\ \left[\operatorname{atan} \left[\frac{2 \cdot x \cdot \frac{w}{wn}}{1 - \left(\frac{w}{wn} \right)^2} \right] + p \right] \cdot \frac{360}{2 \cdot p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Expresion del Angulo de fase



Quando $\omega / \omega_n \ll 1$ el ángulo de fase ϕ es casi cero y los desplazamientos están esencialmente en fase con la fuerza aplicada

Quando $\omega / \omega_n \gg 1$ el ángulo de fase ϕ es casi 180 y los desplazamientos están fuera de fase con la fuerza aplicada.

Quando $\omega = \omega_n$ el ángulo de fase ϕ es 90 grados y los desplazamientos son máximos cuando la fuerza pasa por cero.