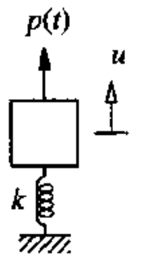
Vibraciones amortiguadas de sistemas de un grado de libertad con excitación armónica - Análisis con números complejos.

Reference:C:\Ing\unidades.mcd

Se estudiará el modelo formado por una masa ***m.*** un resorte de constante ***K*** y un amortiguador de constante ***C*** sometido a una fuerza perturbadora senoidal de amplitud ***Po*** y pulsación ω. De acuerdo a lo visto, los parámetros del sistema son :



Modelo de 1 GL

Frecuencia natural

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Frecuencia natural con amortiguamiento

$$\boxed{\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Coeficiente de amortiguamiento

$$\boxed{\xi = \frac{C}{Cc} = \frac{C}{2 \cdot m \cdot \omega_n}}$$

La ecuación diferencial del movimiento es :

$$m \cdot \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right) + C \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + K \cdot x = Po \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dividimos por la masa m nos queda :

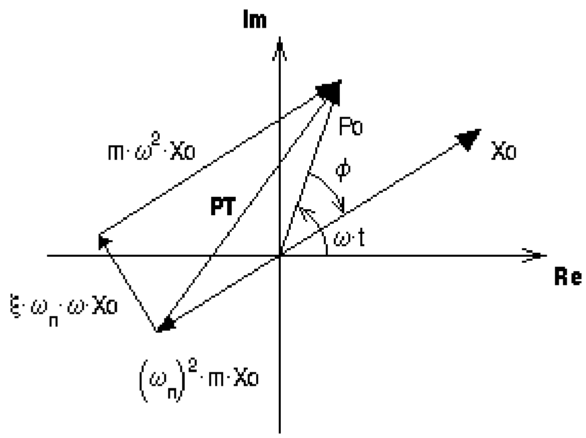
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{C}{m} \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{Po}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Reemplazando por los parametros correspondientes nos queda :

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \frac{dx(t)}{dt} + (\omega_n)^2 \cdot x = \frac{Po}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

En el modelo de vibraciones forzadas sin amortiguamiento, la solución senoidal para ***x*** estaba en fase (o en oposición) con la fuerza perturbadora. La fuerza de inercia (derivada segunda de la solución) también estaba en fase u oposición con la fuerza perturbadora.

Suponiendo para este caso una solución senoidal con pulsación igual a la de la derivada primera de esa solución, o sea la fuerza ejercida por el amortiguador, esta adelantada en $\pi/2$ respecto de la fuerza ejercida por el resorte. Por lo tanto, la solución no puede estar en fase con ***Po*** pues en ese caso la fuerza debida al amortiguamiento quedaría sin equilibrar.



Solución no factible :

$$\mathbf{x = Xo \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

Fuerza del resorte :

$$\mathbf{-k \cdot x = -k \cdot Xo \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

Fuerza del amortiguador :

$$\mathbf{-C \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = -C \cdot \omega \cdot Xo \cdot cos(\omega \cdot t)}$$

Fuerza de inercia :

$$\mathbf{-m \cdot \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = m \cdot \omega^2 \cdot Xo \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

Por lo tanto la solución ***x(t)*** debe estar atrasada un cierto ángulo ϕ respecto de ***P(t),*** para que una componente de ésta equilibre a la fuerza del amortiguador.

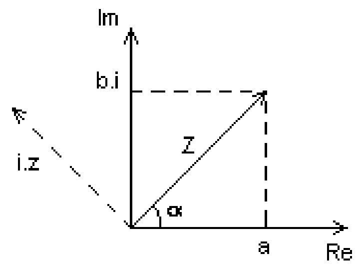
La solucion que planteamos es del tipo : $\mathbf{x(t) = Xo \cdot sen(\omega \cdot t - \phi)}$

Usamos notacion compleja :

$$\mathbf{z = a + i \cdot b}$$

$$\mathbf{z = r \cdot (cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha))}$$

$$\mathbf{z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}}$$



$$\mathbf{i \cdot z = i \cdot a - b}$$

$$\mathbf{i \cdot z = -r \cdot sin(\alpha) + r \cdot i \cdot cos(\alpha)}$$

$$\mathbf{i \cdot z = r \cdot \left(cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$\mathbf{i \cdot z = r \cdot e^{i \cdot \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Usando la formula de Euler :

$$\boxed{\mathbf{e^{i \cdot \alpha} = cos(\alpha) + i \cdot sen(\alpha)}}$$

Teniendo en cuenta que :

$$\boxed{\mathbf{sin(\alpha) = -cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\mathbf{cos(\alpha) = sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Entonces podemos expresar :

$$\mathbf{P(t) = Po \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

$$\mathbf{P(t) = Im(Po \cdot sin(\omega \cdot t))}$$

$$\mathbf{P(t) = Im[Po \cdot (cos(\omega \cdot t) + i \cdot sin(\omega \cdot t))]}$$

Y la respuesta la podemos expresar como : $\mathbf{x(t) = Im(z(t))}$

Entonces la ecuacion diferencial la podemos expresar como :

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt} + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot \frac{dz}{dt} + (w_n)^2 \cdot z = \frac{Po}{m} \cdot e^{i \cdot w \cdot t}}$$

Cuya solucion es ahora :

$$z(t) = Z \cdot e^{i \cdot w \cdot t}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = Z \cdot i \cdot w \cdot e^{i \cdot w \cdot t}$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt} = Z \cdot i^2 \cdot w^2 \cdot e^{i \cdot w \cdot t} \qquad \frac{d^2 z(t)}{dt} = -Z \cdot w^2 \cdot e^{i \cdot w \cdot t}$$

Reemplazamos en la ecuacion diferencial :

$$-Z \cdot w^2 \cdot e^{i \cdot w \cdot t} + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot Z \cdot i \cdot w \cdot e^{i \cdot w \cdot t} + (w_n)^2 \cdot Z \cdot e^{i \cdot w \cdot t} = \frac{Po}{m} \cdot e^{i \cdot w \cdot t}$$

simplificando conduce a :

$$-Z \cdot w^2 + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot Z \cdot i \cdot w + (w_n)^2 \cdot Z = \frac{Po}{m}$$

$$Z = \frac{Po}{m} \cdot \frac{1}{(w_n)^2 - w^2 + i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del complejo y nos queda :

$$Z = \frac{Po}{m} \cdot \frac{1}{(w_n)^2 - w^2 + i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w} \cdot \frac{(w_n)^2 - w^2 - i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}{(w_n)^2 - w^2 - i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}$$

$$Z = \frac{Po}{m} \cdot \frac{(w_n)^2 - w^2 - i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}$$

$$\boxed{Z = \frac{Po}{m} \cdot \frac{(w_n)^2 - w^2}{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2} - \frac{i \cdot 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}}$$

Llamando :

$$\boxed{A = \frac{(w_n)^2 - w^2}{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}} \qquad \boxed{B = \frac{2 \cdot x \cdot w_n \cdot w}{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2 \cdot x \cdot w_n \cdot w)^2}}$$

La respuesta nos queda :

$$\boxed{Z = \frac{Po}{m} \cdot (A + B \cdot i)}$$

Calculo de la amplitud del movimiento :

Para calcular la amplitud ***Xo*** hacemos lo siguiente :

$$Xo = |Z| \qquad \boxed{Xo = \frac{Po}{m}\cdot\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\boxed{Xo = \frac{Po}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2\cdot x\cdot w_n\cdot w)^2}}}$$

Amplitud del movimiento

Calculo de la respuesta total :

La solucion particular (o permanente) se obtiene reemplazando la expresion de la amplitud ***Xo*** en $x(t) = Xo\cdot\sin(w\cdot t - f)$

$$\boxed{xperm(t) = \frac{\frac{Po}{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot x\cdot\frac{w}{w_n}\right)^2}}\cdot\sin(w\cdot t - f)}$$

La respuesta total se obtiene sumando la solucion particular (respuesta permanente) y la solucion homogenea (respuesta transitoria) correspondiente al modelo de vibraciones libres con amortiguamiento.

$$x(t) = Xo\cdot e^{-x\cdot w_n\cdot t}\cdot\left(\cos(w_r\cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot sen(w_r\cdot t)\right) + \frac{Vo}{w_r}\cdot e^{-x\cdot w_n\cdot t}\cdot sen(w_r\cdot t) \quad +$$

$$+ \quad \frac{\frac{Po}{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot x\cdot\frac{w}{w_n}\right)^2}}\cdot\sin(w\cdot t - f)$$

Calculo del angulo de fase :

El angulo de fase se calcula con :

$$\tan(f) = \frac{Im(Z)}{Re(Z)} \qquad \tan(f) = \frac{B}{A}$$

$$\boxed{\tan(f) = -\frac{2\cdot x\cdot w_n\cdot w}{(w_n)^2 - w^2}} \qquad \boxed{\tan(f) = \frac{2\cdot x\cdot\frac{w}{w_n}}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

Angulo de fase

<u>Graficacion de las respuestas :</u>

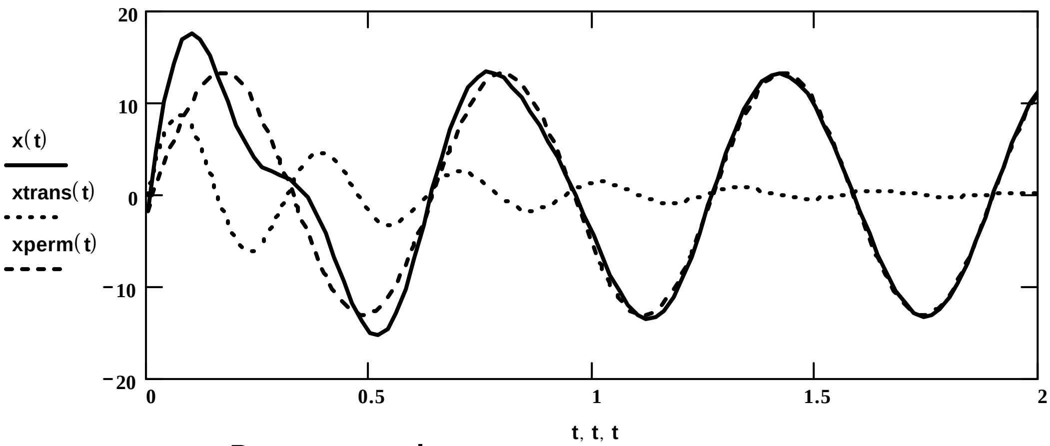
$Po := 100 \cdot kg \quad K := 10 \cdot \frac{kg}{m} \quad wn := 20 \cdot \frac{1}{seg} \quad w := 10 \cdot \frac{1}{seg} \quad x := 0.1 \quad Xo := 0 \cdot cm \quad Vo := \frac{wn \cdot Po}{K}$

$$\boxed{f := \operatorname{atan}\left[\frac{2 \cdot x \cdot \frac{w}{wn}}{1 - \left(\frac{w}{wn}\right)^2}\right]} \qquad \boxed{wr := wn \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{xtrans(t) := Xo \cdot e^{-x \cdot wn \cdot t} \cdot \left(\cos(wr \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sin(wr \cdot t)\right) + \frac{Vo}{wr} \cdot e^{-x \cdot wn \cdot t} \cdot \sin(wn \cdot t)}$$

$$\boxed{xperm(t) := \frac{\frac{Po}{K}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{wn}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{wn}\right)^2}} \cdot \sin(w \cdot t - f)} \qquad \boxed{x(t) := xtrans(t) + xperm(t)}$$

$t := 0, 0.02 \cdot seg .. 2 \cdot seg$



Respuesta total
Respuesta transitoria
Respuesta permanente

Calculo del Factor de Amplificacion Dinamica :

Para calcular el ***factor de amplificacion dinamica*** partimos de la expresion de la amplitud

$$\boxed{Xo = \frac{Po}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2\cdot x\cdot w_n\cdot w)^2}}}$$

$$\boxed{Xo = \frac{Po}{\left[\dfrac{K}{(w_n)^2}\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2\cdot x\cdot w_n\cdot w)^2}}}$$

El corrimiento estatico del resorte es : $d = \dfrac{Po}{K}$

Este ***factor de amplificacion dinamica*** se define como la relacion entre la amplitud de la deformacion dinamica, y la amplitud de la deformacion estatica debida a la carga ***Po.***

$$Rd = \frac{Xo}{d} \qquad Rd = \frac{(w_n)^2}{\sqrt{\left[(w_n)^2 - w^2\right]^2 + (2\cdot x\cdot w_n\cdot w)^2}}$$

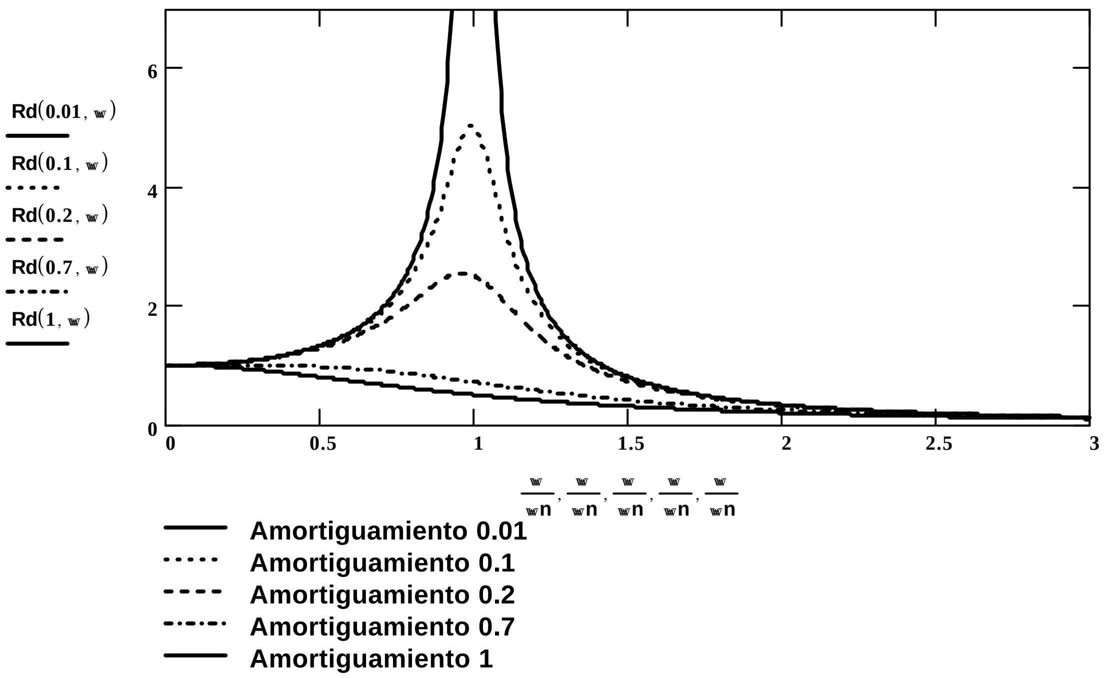
$$\boxed{Rd(x, w) := \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{w}{wn}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot x\cdot\dfrac{w}{wn}\right)^2}}}$$

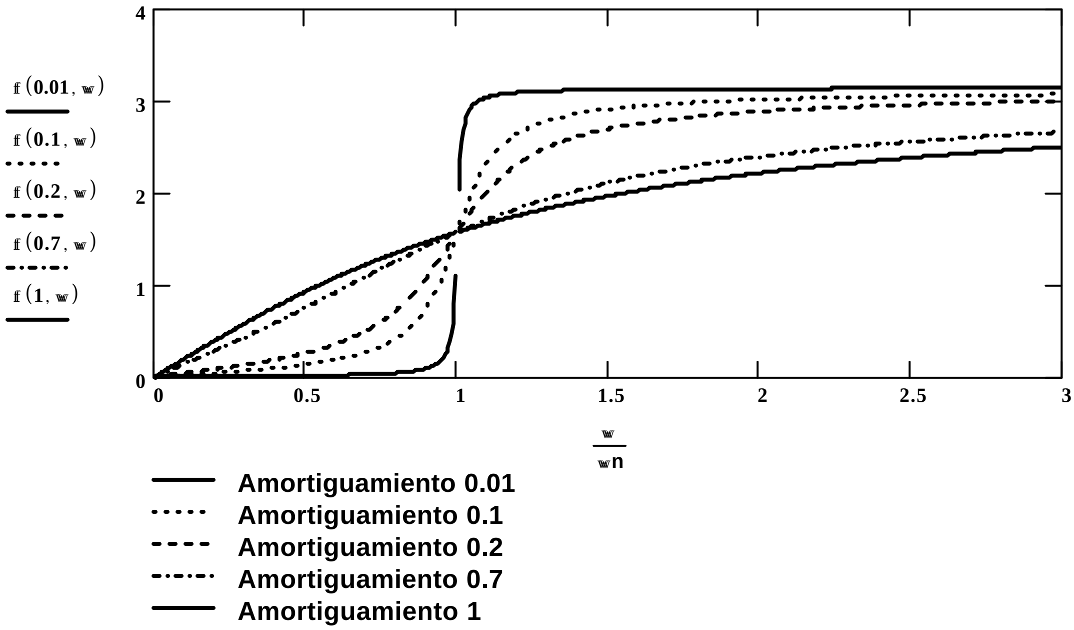
Factor de Amplificacion Dinamica

$$w := 0, 0.1 .. 60$$

$$f(x, w) := \left|\begin{array}{ll} \left[\operatorname{atan}\left[\dfrac{2\cdot x\cdot\dfrac{w}{wn}}{1 - \left(\dfrac{w}{wn}\right)^2}\right]\right] & \text{if } w \le wn \\ \left[\operatorname{atan}\left[\dfrac{2\cdot x\cdot\dfrac{w}{wn}}{1 - \left(\dfrac{w}{wn}\right)^2}\right] + p\right] & \text{otherwise} \end{array}\right.$$

Expresion del Angulo de fase





Cuando $\omega / \omega n \ll 1$ el angulo de fase ϕ es casi cero y los desplazamientos estan esencialmente en fase con la fuerza aplicada

Cuando $\omega / \omega n \gg 1$ el angulo de fase ϕ es casi 180 y los desplazamientos estan fuera de fase con la fuerza aplicada.

Cuando $\omega = \omega n$ el angulo de fase ϕ es 90 grados y los desplazamientos son maximos cuando la fuerza pasa por cero