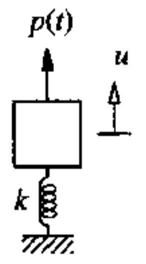
Vibraciones amortiguadas de sistemas de un grado de libertad con excitación armónica - Análisis por equilibrio de fuerzas.

Reference:C:\ING\DYNAM\Teoria\unidades.mcd

Se estudiará el modelo formado por una masa m. un resorte de constante ***K*** y un amortiguador de constante ***C*** sometido a una fuerza perturbadora senoidal de amplitud ***Po*** y pulsación ω. De acuerdo a lo visto, los parámetros del sistema son :



Modelo de 1 GL

Frecuencia natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Frecuencia natural con amortiguamiento

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Coeficiente de amortiguamiento

$$\xi = \frac{C}{Cc} = \frac{C}{2 \cdot m \cdot \omega_n}$$

La ecuación diferencial del movimiento es :

$$m \cdot \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right) + C \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + K \cdot x = Po \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dividimos por la masa m nos queda :

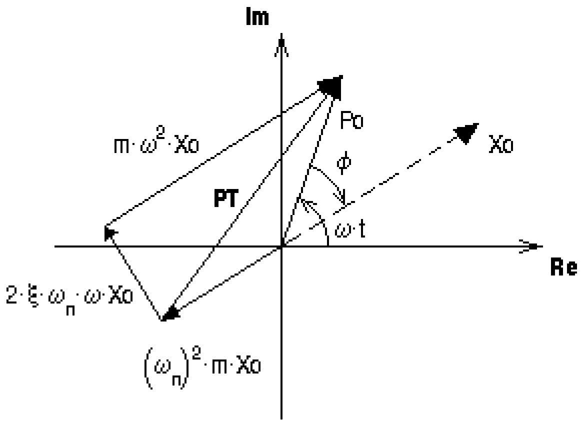
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{C}{m} \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{Po}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Reemplazando por los parametros correspondientes nos queda :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \frac{dx(t)}{dt} + (\omega_n)^2 \cdot x = \frac{Po}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

En el modelo de vibraciones forzadas sin amortiguamiento, la solución senoidal para ***x*** estaba en fase (o en oposición) con la fuerza perturbadora. La fuerza de inercia (derivada segunda de la solución) también estaba en fase u oposición con la fuerza perturbadora.

Suponiendo para este caso una solución senoidal con pulsación igual a la de la derivada primera de esa solución, o sea la fuerza ejercida por el amortiguador, esta adelantada en ***π/2*** respecto de la fuerza ejercida por el resorte. Por lo tanto, la solución no puede estar en fase con ***Po*** pues en ese caso la fuerza debida al amortiguamiento quedaría sin equilibrar.



Solución no factible :

$$\boxed{x(t) = Xo \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)}$$

Fuerza del resorte :

$$\boxed{-k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot Xo \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)}$$

Fuerza del amortiguador :

$$\boxed{-C \cdot \frac{dx}{dt} = -2 \cdot m \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot Xo \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)}$$

Fuerza de inercia :

$$\boxed{-m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x = m \cdot \omega^2 \cdot Xo \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)}$$

Los vectores de fuerza, incluyendo la de inercia, deben proporcionar un polígono cerrado. De él tenemos :

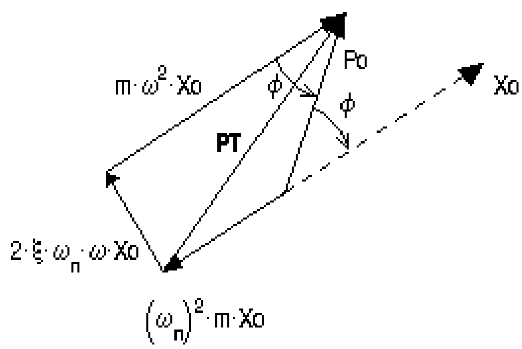
$$Po \cdot \sin(\phi) = 2 \cdot m \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot Xo$$

$$Po \cdot \cos(\phi) = m \cdot (\omega_n)^2 \cdot Xo - m \cdot \omega^2 \cdot Xo$$

Por lo tanto la solución ***x(t)*** debe estar atrasada un cierto ángulo ϕ respecto de ***P(t),*** para que una componente de ésta equilibre a la fuerza del amortiguador.

Elevando al cuadrado ambas expresiones :

La solucion que planteamos es del tipo :



$$Po^2 \cdot \sin(\phi)^2 = (2 \cdot m \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega \cdot Xo)^2$$

$$Po^2 \cdot \cos(\phi)^2 = \left[m \cdot (\omega_n)^2 \cdot Xo - m \cdot \omega^2 \cdot Xo\right]^2$$

Sumando ambas ecuaciones nos queda :

$$Po^2 = Xo^2 \cdot \left[(2 \cdot m \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2 + \left[m \cdot (\omega_n)^2 - m \cdot \omega^2\right]^2 \right]$$

$$Po^2 = Xo^2 \cdot \left[(2 \cdot m \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2 + m^2 \cdot \left[(\omega_n)^2 - \omega^2\right]^2 \right]$$

Despejando obtenemos el valor de la ***amplitud del movimiento*** :

$$Xo = \frac{Po}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(\omega_n)^2-\omega^2\right]^2+(2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot\omega)^2}}$$

Asi mismo, del polígono de fuerzas, puede obtenerse la expresión para el ***ángulo de fase*** ϕ :

$$\tan(\phi) = \frac{2\cdot m\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot\omega\cdot Xo}{m\cdot(\omega_n)^2\cdot Xo - m\cdot\omega^2\cdot Xo} = \frac{2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot\omega}{\left[(\omega_n)^2-\omega^2\right]} = \frac{2\cdot\xi\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = \mathrm{atan}\left[\frac{2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot\omega}{\left[(\omega_n)^2-\omega^2\right]}\right] = \mathrm{atan}\left[\frac{2\cdot\xi\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Por lo tanto la solucion en regimen permanente resulta :

$$xperm(t) = \frac{Po}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(\omega_n)^2-\omega^2\right]^2+(2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot\omega)^2}}\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi)$$

Graficamos la respuesta para los valores dados y nos queda :

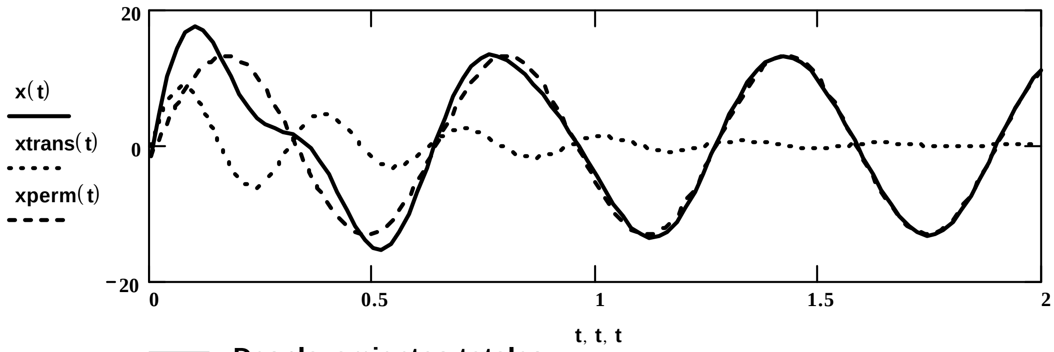
$$Po := 100\cdot kg \qquad K := 10\cdot\frac{kg}{m} \qquad \omega n := 20\cdot\frac{1}{seg} \qquad \omega := 10\cdot\frac{1}{seg} \qquad \xi := 0.1 \qquad Xo := 0\cdot cm \qquad Vo := \frac{\omega n\cdot Po}{K}$$

$$t := 0, 0.02\cdot seg .. 2\cdot seg \qquad \boxed{\omega r := \omega n\cdot\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \boxed{M := \frac{K}{\omega n^2}} \qquad \boxed{\phi := \mathrm{atan}\left[\frac{2\cdot\xi\cdot\omega n\cdot\omega}{\left[(\omega n)^2-\omega^2\right]}\right]}$$

$$xperm(t) := \frac{Po}{M}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[(\omega n)^2-\omega^2\right]^2+(2\cdot\xi\cdot\omega n\cdot\omega)^2}}\cdot\sin(\omega\cdot t-\phi)$$

$$xtrans(t) := Xo\cdot e^{-\xi\cdot\omega n\cdot t}\cdot\left(\cos(\omega r\cdot t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega r\cdot t)\right)+\frac{Vo}{\omega r}\cdot e^{-\xi\cdot\omega n\cdot t}\cdot\sin(\omega n\cdot t)$$

$$x(t) := xtrans(t) + xperm(t)$$



Desplazamientos totales
Solucion transitoria
Solucion permanente

<u>Calculo del coeficiente de Amplificacion Dinamica :</u>

Para calcular el ***factor de amplificacion dinamica*** partimos de la expresion de la amplitud

$$\boxed{Xo = \frac{Po}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[(\omega_n)^2 - \omega^2\right]^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2}}} \qquad \boxed{Xo = \frac{Po}{\left[\dfrac{K}{(\omega_n)^2}\right]} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[(\omega_n)^2 - \omega^2\right]^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2}}}$$

El corrimiento estatico del resorte es : $\boxed{\delta = \frac{Po}{K}}$

Este ***factor de amplificacion dinamica*** se define como la relacion entre la amplitud de la deformacion dinamica, y la amplitud de la deformacion estatica debida a la carga Po.

$$\boxed{Rd = \frac{Xo}{\delta}} \qquad \boxed{Rd = \frac{(\omega_n)^2}{\sqrt{\left[(\omega_n)^2 - \omega^2\right]^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \omega)^2}}}$$

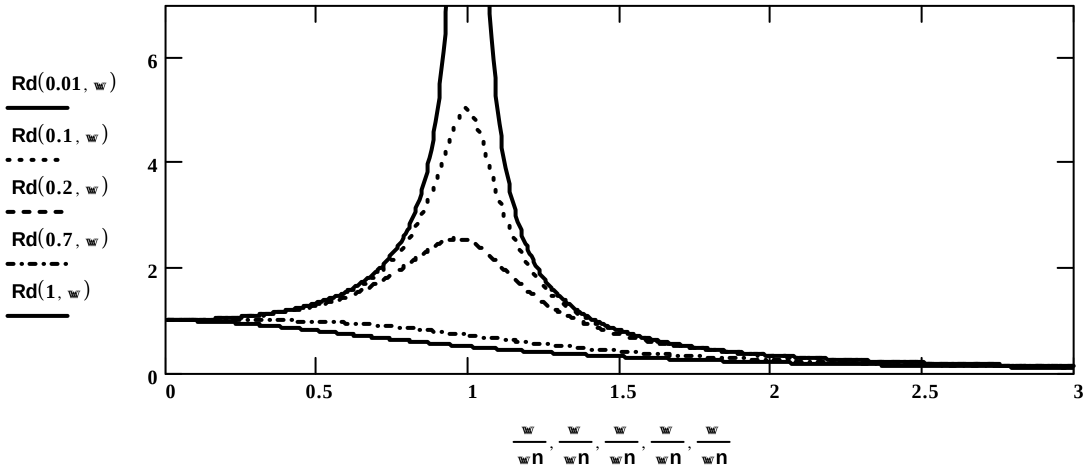
$$\boxed{Rd(\xi, \omega) := \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \dfrac{\omega}{\omega n}\right)^2}}}$$

<u>Factor de Amplificacion Dinamica</u>

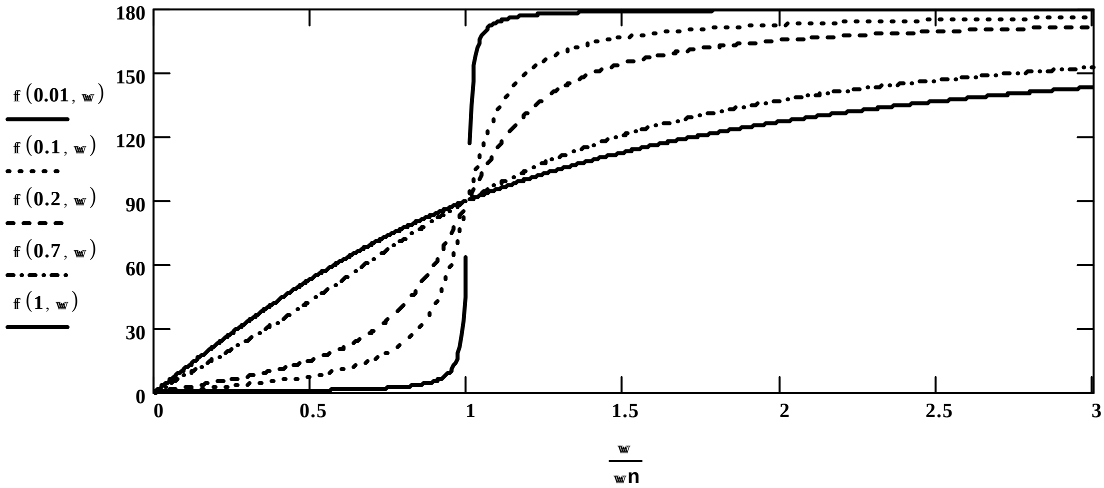
$\omega := 0, 0.1 .. 60$

$$f(x,w) := \begin{cases} \left[\text{atan}\left[\dfrac{2 \cdot x \cdot \dfrac{w}{wn}}{1 - \left(\dfrac{w}{wn}\right)^2} \right] \right] \cdot \dfrac{360}{2 \cdot p} & \text{if } w \le wn \\ \left[\text{atan}\left[\dfrac{2 \cdot x \cdot \dfrac{w}{wn}}{1 - \left(\dfrac{w}{wn}\right)^2} \right] + p \right] \cdot \dfrac{360}{2 \cdot p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Expresion del Angulo de fase



Amortiguamiento 0.01
Amortiguamiento 0.1
Amortiguamiento 0.2
Amortiguamiento 0.7
Amortiguamiento 1



Amortiguamiento 0.01
Amortiguamiento 0.1
Amortiguamiento 0.2
Amortiguamiento 0.7
Amortiguamiento 1

Cuando w / wn << 1 el angulo de fase f es casi cero y los desplazamientos estan esencialmente en fase con la fuerza aplicada

Cuando w / wn >> 1 el angulo de fase f es casi 180 y los desplazamientos estan fuera de fase con la fuerza aplicada.

Cuando w = wn el angulo de fase f es 90 grados y los desplazamientos son maximos cuando la fuerza pasa por cero