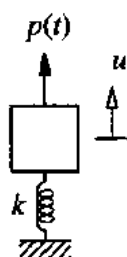


## Respuesta de sistemas de un grado de libertad amortiguados con excitación armónica en el caso de resonancia.

☞ Reference:C:\Inglunidades.mcd

Se estudiará el modelo formado por una masa  $m$ , un resorte de constante  $K$  y un amortiguador de constante  $C$  sometido a una fuerza perturbadora senoidal de amplitud  $P_0$  y pulsación  $\omega$ , igual a la frecuencia natural de vibración  $\omega_n$ . De acuerdo a lo visto, los parámetros del sistema son :



Modelo de 1 GL

Frecuencia natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Frecuencia natural con amortiguamiento

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Coefficiente de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 \cdot m \cdot \omega_n}$$

La ecuación diferencial del movimiento es :

$$m \cdot \left( \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right) + C \cdot \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) + K \cdot x = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dividimos por la masa  $m$  nos queda :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{C}{m} \cdot \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Reemplazando por los parámetros correspondientes nos queda :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \frac{dx(t)}{dt} + (\omega_n)^2 \cdot x = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

La solución que planteamos es del tipo :  $x(t) = X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)$

Desarrollando se tiene :  $x(t) = X_0 \cdot (\cos(f) \cdot \sin(w \cdot t) - \sin(f) \cdot \cos(w \cdot t))$

Ahora si llamamos :  $C = X_0 \cdot \cos(f)$

$D = -X_0 \cdot \sin(f)$

La expresion de los desplazamientos nos queda :

$$x(t) = C \cdot \sin(w \cdot t) + D \cdot \cos(w \cdot t)$$

Calculamos sus derivadas :

$$\frac{d}{dt}x(t) = C \cdot w \cdot \cos(w \cdot t) - D \cdot w \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -C \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t) - D \cdot w^2 \cdot \cos(w \cdot t)$$

Reemplazamos en la ecuacion diferencial :

$$(-C \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t) - D \cdot w^2 \cdot \cos(w \cdot t)) + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w \cdot (C \cdot w \cdot \cos(w \cdot t) - D \cdot w \cdot \sin(w \cdot t)) +$$

$$+ (w_n)^2 \cdot (C \cdot \sin(w \cdot t) + D \cdot \cos(w \cdot t)) = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$[(-C \cdot w^2 - 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w \cdot D) + (w_n)^2 \cdot C] \cdot \sin(w \cdot t) + [-D \cdot w^2 + 2 \cdot w^2 \cdot w_n \cdot x \cdot C + (w_n)^2 \cdot D] \cdot \cos(w \cdot t) =$$

$$= \frac{P_0}{m} \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$[[ (w_n)^2 - w^2 ] \cdot C - 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w \cdot D] \cdot \sin(w \cdot t) + [[ (w_n)^2 - w^2 ] \cdot D + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot w \cdot C] \cdot \cos(w \cdot t) = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(w \cdot t)$$

Para que esta ecuacion sea valida para todo  $t$ , los coeficientes de los terminos en seno y coseno en los dos lados de la ecuacion deben ser iguales. Este requerimiento hace que tengamos 2 ecuaciones con 2 incognitas  $C$  y  $D$ .

Dividiendo por  $w_n^2$  y teniendo en cuenta la relacion  $K = w_n^2 \cdot m$  tenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\left[ 1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2 \right] \cdot C - \left( 2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n} \right) \cdot D = \frac{P_0}{K}$$

$$\left[ 1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2 \right] \cdot D + \left( 2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n} \right) \cdot C = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos :

$$C = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2} \quad D = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{-2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot x \cdot \frac{w}{w_n}\right)^2}$$

Para el caso de resonancia que estamos estudiando, haciendo  $w = w_n$  nos queda :

$$C = 0 \quad D = -\frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x}$$

Por lo tanto la solución en régimen permanente resulta :

$$x_{perm}(t) = -\frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(w_n \cdot t)$$

La respuesta en régimen transitorio vimos que podía expresarse como :

$$x_{trans}(t) = e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(w_r \cdot t) + B \cdot \sin(w_r \cdot t))$$

La respuesta total del sistema es la superposición de las dos anteriores :

$$x(t) = e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(w_r \cdot t) + B \cdot \sin(w_r \cdot t)) - \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(w_n \cdot t)$$

Restan calcular las constantes A y B para la condición resonante, entonces calculamos su derivada y usamos las condiciones iniciales del problema :

$$\frac{dx}{dt} = \left[ -x \cdot w_n \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(w_r \cdot t) + B \cdot \sin(w_r \cdot t)) + e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot (-A \cdot \sin(w_r \cdot t) \cdot w_r + B \cdot \cos(w_r \cdot t) \cdot w_r) \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{P_o}{(K \cdot x)} \cdot \sin(w_n \cdot t) \cdot w_n$$

Para  $t = 0$ ,  $x = 0$

$$0 = A - \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \quad A = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x}$$

Para  $t = 0$ ,  $dx/dt = 0$

$$0 = (-x \cdot w_n \cdot A + B \cdot w_r) \quad 0 = \left[ -x \cdot w_n \cdot \left( \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \right) + B \cdot w_n \cdot \sqrt{1 - x^2} \right]$$

$$B = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

Y la expresion de la respuesta total del sistema resulta :

$$x(t) = e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left( \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(\omega_r \cdot t) + \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\omega_r \cdot t) \right) - \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$x(t) = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \left[ e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left( \cos(\omega_r \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\omega_r \cdot t) \right) - \cos(\omega_n \cdot t) \right]$$

Para sistemas con muy poco amortiguamiento, el termino en seno es despreciable y  $\omega = \omega_n$ , entonces los desplazamientos pueden escribirse como :

$$x(t) = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot (e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

Donde la expresion de la envolvente de los desplazamientos resulta :

$$\text{env}(t) = \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot (e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} - 1)$$

Graficando los resultados obtenidos se tiene :

$$P_o := 10 \cdot \text{kg} \quad K := 100 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad \omega_n := 20 \cdot \frac{1}{\text{seg}} \quad x := 0.01 \quad X_o := \frac{P_o}{K} \quad V_o := \omega_n \cdot \frac{P_o}{K}$$

$$t := 0, 0.02 \cdot \text{seg} .. 10 \cdot \text{seg}$$

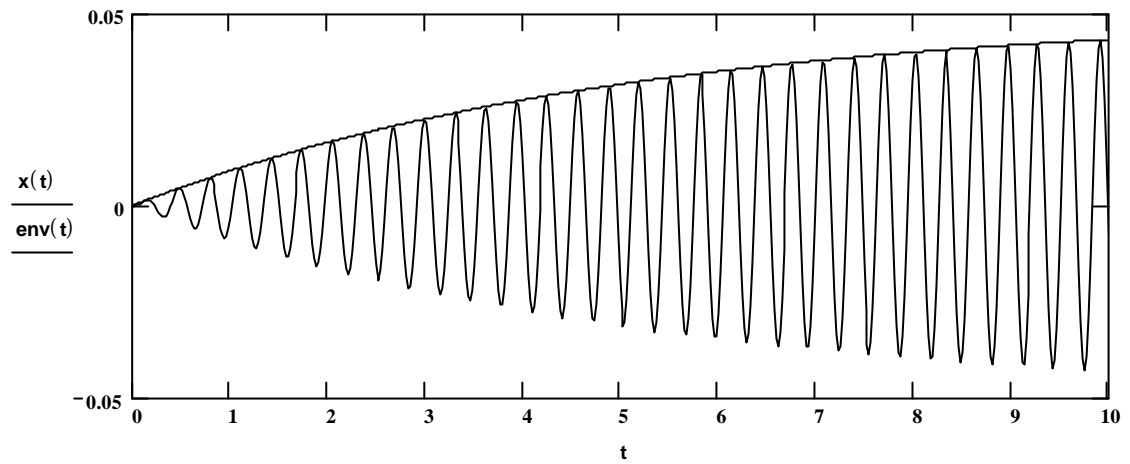
$$\omega_r := \omega_n \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$x_{\text{perm}}(t) := -\frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$\text{env}(t) := \left( \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \right) \cdot (e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} - 1)$$

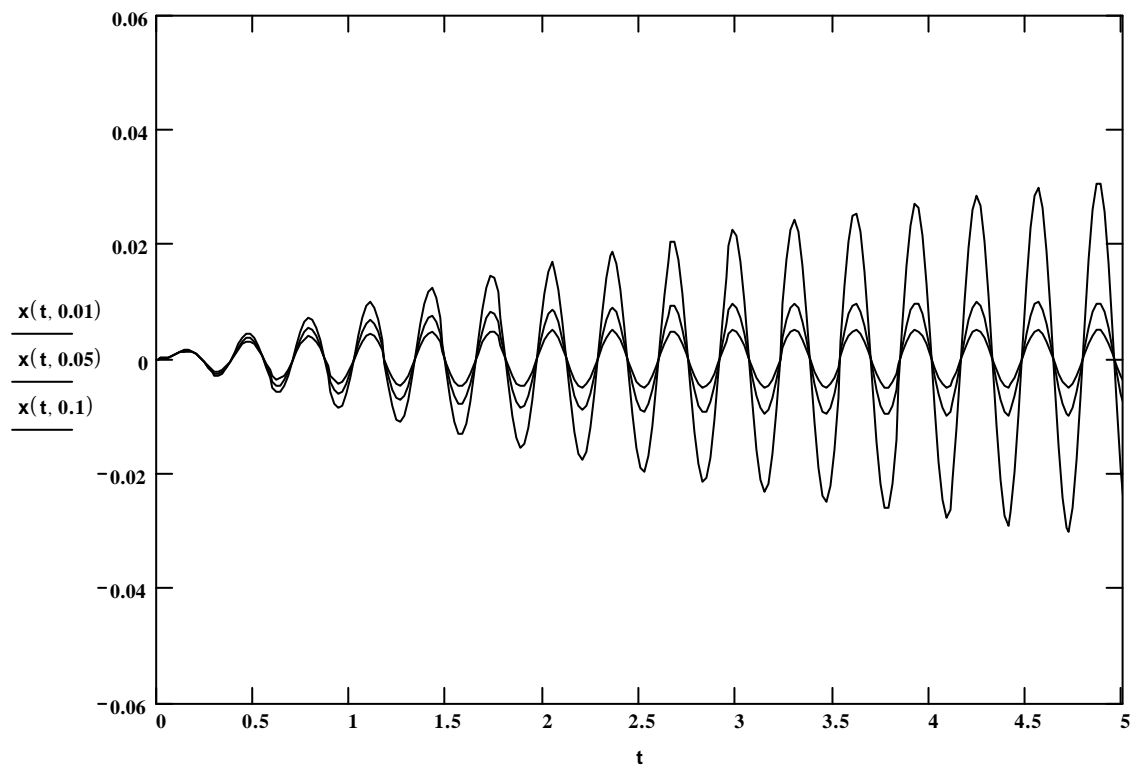
$$x_{\text{trans}}(t) := e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left( \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \cos(\omega_r \cdot t) + \frac{P_o}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\omega_r \cdot t) \right)$$

$$x(t) := x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{perm}}(t)$$



Ahora se analiza el efecto del amortiguamiento en la respuesta en resonancia, el cual resulta sensible y lo graficamos para tres valores del coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.01, 0.05$  y  $0.10$

$$x(t, \alpha) := \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \left[ e^{-\alpha \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left( \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \right) - \cos(\omega_n \cdot t) \right]$$

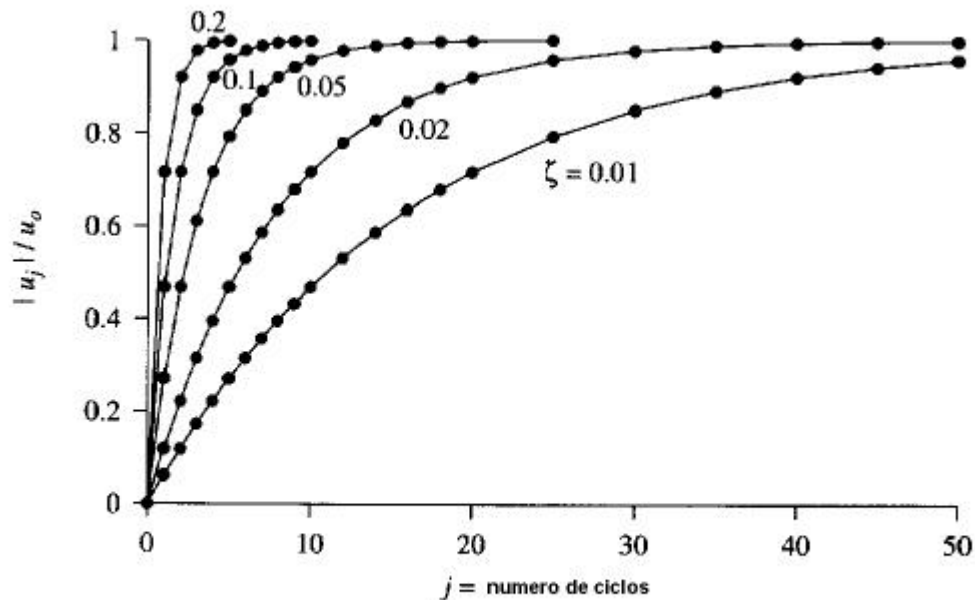


Ahora examinamos como varían los valores máximos  $u_j$  después de  $j$  ciclos de vibración. La relación entre  $u_j$  y  $j$  puede hacerse haciendo  $t = j \cdot T_n$  en la ecuación de la envolvente de los desplazamientos, haciendo

$\cos(\omega_n \cdot t) = 1$  y usando la expresión  $u_0 = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{2 \cdot x}$  obtenemos

$$\frac{|u_j|}{u_0} = 1 - e^{-2 \cdot \zeta \cdot x \cdot j}$$

Esta relación la graficamos para valores de  $\zeta = 0.01, 0.02, 0.05, 0.10$  y  $0.20$ . Los puntos discretos los unimos por curvas, pero solamente los valores enteros de  $j$  son los válidos.



Variación de la amplitud de la respuesta con el número de ciclos de fuerza armónica con frecuencia  $\omega = \omega_n$ .

Cuanto menor sea el amortiguamiento, tanto mayor será el número de ciclos que se requieren para llegar a valores de amplitudes cercanos a  $u_0$  que es la máxima amplitud en régimen permanente. Por ejemplo el número de ciclos requerido para llegar al 95% de  $u_0$  para  $x = 0.01$  es 48; para  $x = 0.02$  es 24; para  $x = 0.05$  es 10; para  $x = 0.10$  es 5 y  $x = 0.20$  es 2