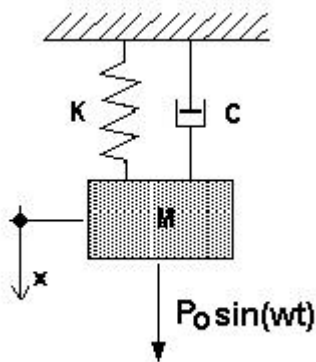


Vibraciones no amortiguadas con excitación armónica.

☞ Reference:C:\Inglunidades.mcd

Sea una masa m suspendida de un resorte de constante K , sometida a una fuerza perturbadora senoidal de amplitud P . Los corrimientos se medirán a partir de la posición de equilibrio de la masa sin la acción de la fuerza perturbadora. De este modo no será necesario tener en cuenta el peso propio en la ecuación diferencial.



Supuestos :

- Masa del resorte despreciable
- No hay amortiguamiento. ($c = 0$)
- Hay fuerzas perturbadoras exteriores $P_0 \sin(\omega t)$
- Se desliza sin rozamiento.

La ecuación diferencial del movimiento resulta :
$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + K \cdot x = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Supongamos que el movimiento responde a una ley senoidal (vibraciones periódicas armónicas) y proponemos como solución homogénea y solución particular :

$$x_H = A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \quad x_P = X \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

en la que X es una amplitud a determinar y la pulsación asumida es igual a la de la fuerza perturbadora. Derivando y reemplazando en la ecuación diferencial nos queda :

$$m \cdot \frac{d^2 (X \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt^2} + K \cdot (X \cdot \sin(\omega \cdot t)) = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$m \cdot (-X \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega^2) + K \cdot (X \cdot \sin(\omega \cdot t)) = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$-m \cdot X \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + K \cdot X \cdot \sin(\omega \cdot t) = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Aplicando el principio de D'Alembert (suma de todas las fuerzas, incluyendo las de inercia, igual a cero) :

$$-K \cdot X \cdot \sin(\omega \cdot t) + P_o \cdot \sin(\omega \cdot t) + m \cdot X \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$$

Fuerza del resorte	Fuerza Perturbadora	Fuerza de Inercia
-----------------------	------------------------	----------------------

Podemos escribir :

$$-K \cdot X + P_o + m \cdot X \cdot \omega^2 = 0$$

$$P_o + X \cdot (m \cdot \omega^2 - K) = 0$$

De donde resulta ser la amplitud maxima del movimiento :

$$X = \frac{P_o}{K - m \cdot \omega^2}$$

**AMPLITUD MAXIMA
DEL MOVIMIENTO**

Pero sabemos que :

$$m = \frac{K}{(\omega_n)^2}$$

$$X = \frac{P_o}{K - \frac{K}{(\omega_n)^2} \cdot \omega^2}$$

$$X = \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}$$

Entonces la solución general resulta :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Condiciones iniciales para $t = 0$, $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$

$$0 = A \cdot \cos(0) \quad \text{resulta } A = 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + B \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$0 = B \cdot \omega_n + \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]} \cdot \omega$$

$$B = -\frac{\omega}{\omega_n} \cdot \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}$$

La respuesta viene dada por la superposicion de dos termino armonicos diferentes, y el movimiento resultante no es armonico.

$$x(t) = \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]} \cdot \left(\text{sen}(w \cdot t) - \frac{w}{w_n} \cdot \text{sen}(w_n \cdot t) \right)$$

En la realidad hay fuerzas de amortiguacion presentes y hacen que el segundo termino con ω desaparezca

$$x(t) = \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \frac{w^2}{(w_n)^2} \right]} \cdot \text{sen}(w \cdot t) - \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \frac{w^2}{(w_n)^2} \right]} \cdot \frac{w}{w_n} \cdot \text{sen}(w_n \cdot t)$$

Respuesta permanente

Respuesta transitoria

Graficando la expresion de los desplazamientos con los siguientes datos iniciales se tiene :

$$P_o := 100 \cdot \text{kg} \quad K := 10 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad w_n := 20 \cdot \frac{1}{\text{seg}} \quad w := 10 \cdot \frac{1}{\text{seg}}$$

Expresión de la respuesta permanente :

$$x_{\text{perm}}(t) := \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]} \cdot \frac{w}{w_n} \cdot \text{sen}(w_n \cdot t)$$

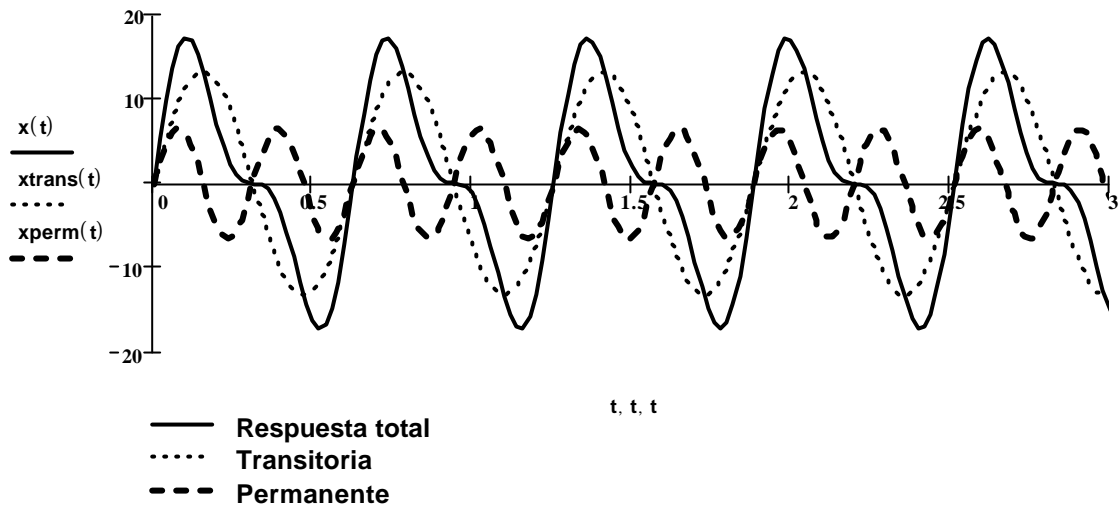
Expresión de la respuesta transitoria :

$$x_{\text{trans}}(t) := \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]} \cdot \text{sen}(w \cdot t)$$

La solución total es la suma de las dos :

$$x(t) := x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{perm}}(t)$$

t := 0, 0.02 .. 3 .seg



La respuesta transitoria es la que desaparece por efecto del amortiguamiento. Nos quedamos solo con la respuesta en regimen permanente :

$$x(t) = \frac{P_o}{K \cdot \left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]} \cdot \sin(w \cdot t)$$

Respuesta permanente

Si ignoramos el efecto dinamico, tenemos la deformacion estatica en cada instante :

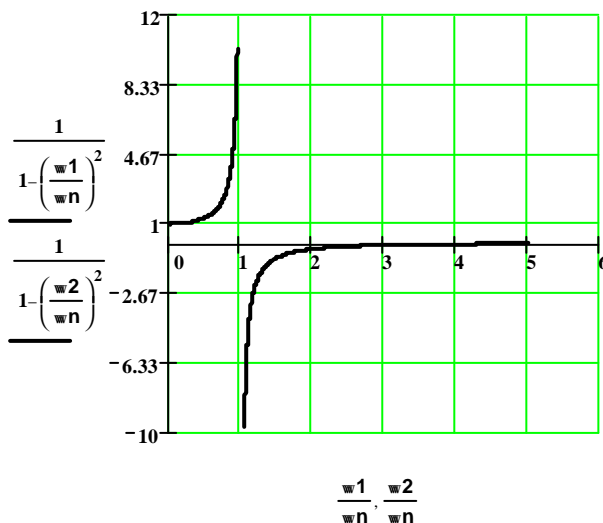
$$X_{ST}(x) = \frac{P_o}{K} \cdot \sin(w \cdot t)$$

El valor maximo esta dado por :

$$X_{STo} = \frac{P_o}{K}$$

w1 := 0, 0.02 .. 19

w2 := 21, 21.02 .. 100



Cuando $\frac{w}{w_n} < 1$ o $w < w_n$ este factor

es positivo, lo que indica que $x(t)$ y $p(t)$ tienen el mismo signo, y el desplazamiento está en fase con la fuerza aplicada.

Cuando $\frac{w}{w_n} > 1$ o $w > w_n$ este factor

es negativo, lo que indica que $x(t)$ y $p(t)$ tienen signos opuestos, y el desplazamiento está fuera de fase con la fuerza aplicada.

Para describirlo matemáticamente, se reescribe la ecuación de los desplazamientos como :

$$x(t) = X_{ST0} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]} \cdot \sin(w \cdot t)$$

De donde la amplitud del movimiento resulta :

$$X_0 = X_{ST0} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]}$$

Y entonces el **Factor de Amplificación Dinámica** resulta :

$$Rd(w) = \frac{X_0}{X_{ST0}} = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right|}$$

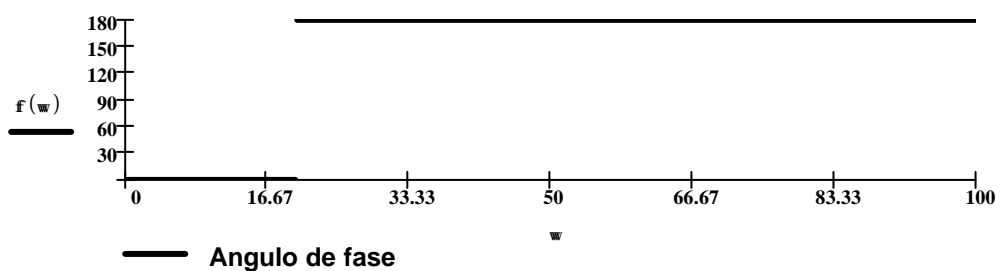
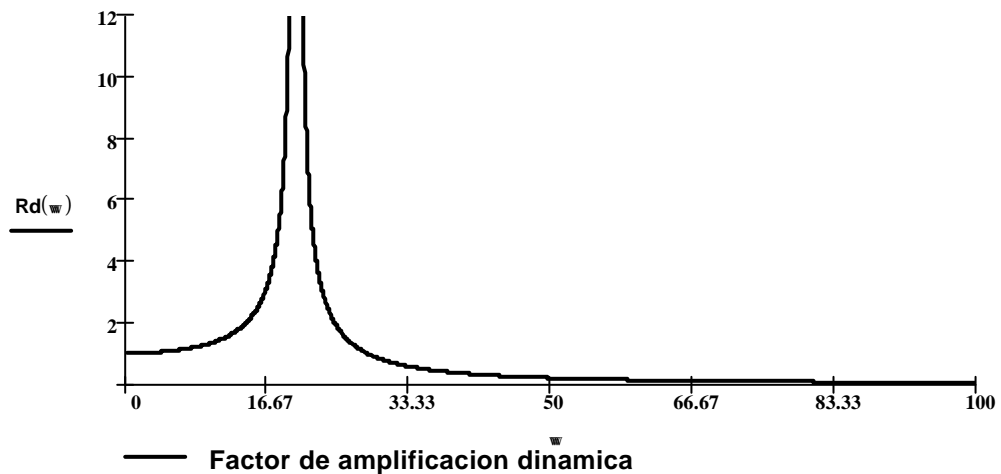
Este factor de amplificación dinámica se define como la relación entre la amplitud de la deformación dinámica, y la amplitud de la deformación estática debida a la carga P_0 . Graficando dicho factor de amplificación dinámica se tiene :

Angulo de fase :

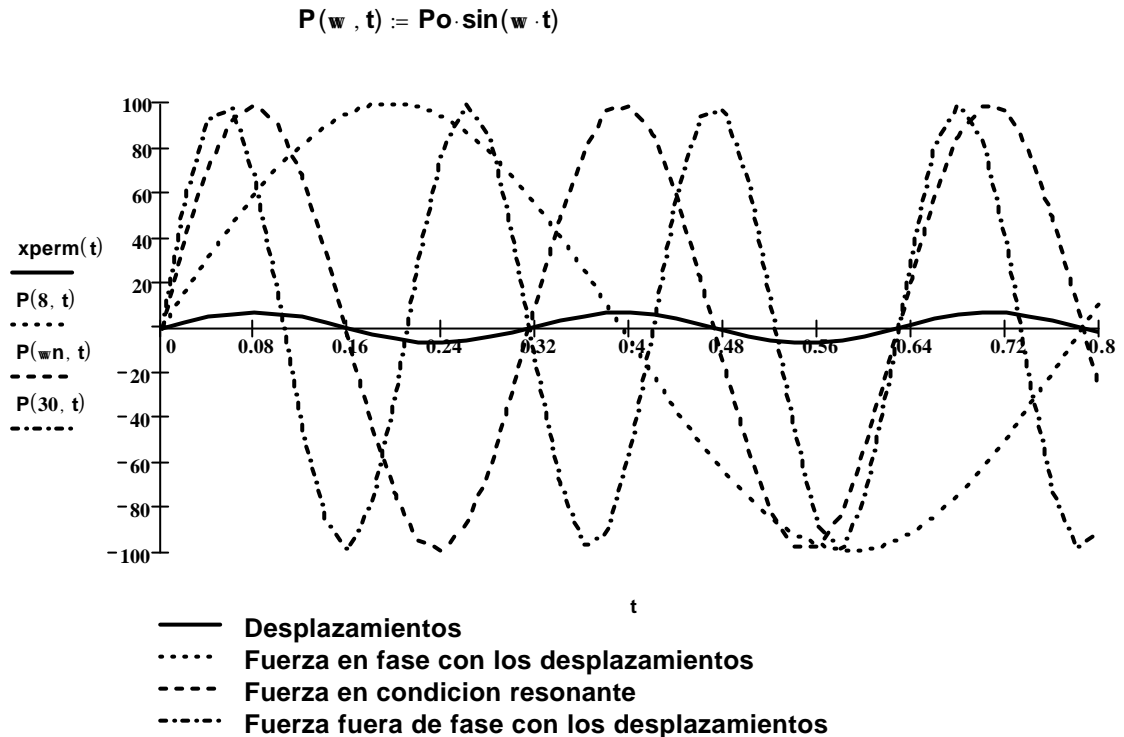
$$Rd(w) := \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right|}$$

$$f(w) := \begin{cases} 0 & \text{if } w < w_n \\ 180 & \text{if } w > w_n \end{cases}$$

$w := 0, 0.02 \dots 100$



Graficando los desplazamientos del sistema simultaneo con las fuerzas actuantes con distintas frecuencias nos da :



Cuando $\omega < \omega_n$, el angulo de fase resulta $\phi = 0$ y esto implica que los desplazamientos varian en $\text{sen}(\omega t)$ en fase con la fuerza aplicada.

Cuando $\omega > \omega_n$, el angulo de fase resulta $\phi = 180$ indicando que los desplazamientos varian en $-\text{sen}(\omega t)$ fuera de fase con la fuerza aplicada.

Cuando $\omega = \omega_n$ se alcanza la resonancia y la solucion de $x(t)$ no esmas valida.A continuacion desarrollamos la solucion para el caso de la frecuencia natural de vibracion coincidente con la frecuencia de la excitacion.

Ahora la solucion particular es otra :

$$x_p(t) = C \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

Y sus derivadas son :

$$\frac{d[x_p(t)]}{dt} = C \cdot (\cos(\omega_n \cdot t) - t \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t))$$

$$\frac{d^2[x_p(t)]}{dt} = C \cdot (-2 \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + t \cdot \omega_n^2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t))$$

Reemplazando en la ecuacion diferencial nos queda :

$$m \cdot C \cdot (-2 \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + t \cdot \omega_n^2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t)) + K \cdot (C \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t)) = P_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

La solucion es : $C = -\frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \omega_n$

Y la solucion particular resulta :

$$x_p(t) = -\frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \omega_n \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

Valido para la frecuencia natural de vibracion coincidente con la frecuencia de la excitacion

$$\omega = \omega_n$$

La solucion total resulta :

$$x(t) = (A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) - \frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \omega_n \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

La velocidad se obtiene derivando la expresion anterior :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega_n \cdot A \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \omega_n \cdot B \cdot \cos(\omega_n \cdot t) - \frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \omega_n^2 \cdot t \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Con las condiciones iniciales para $t = 0$ resulta $x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = 0$ y nos queda un sistema de 2 ecuac con 2 incognitas :

De la ecuacion de $x(t)$: $A = 0$

De la ecuacion de la velocidad : $B = \frac{P_o}{2 \cdot K}$

La ecuacion de los desplazamientos nos queda :

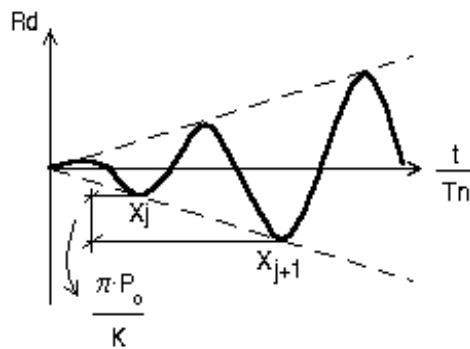
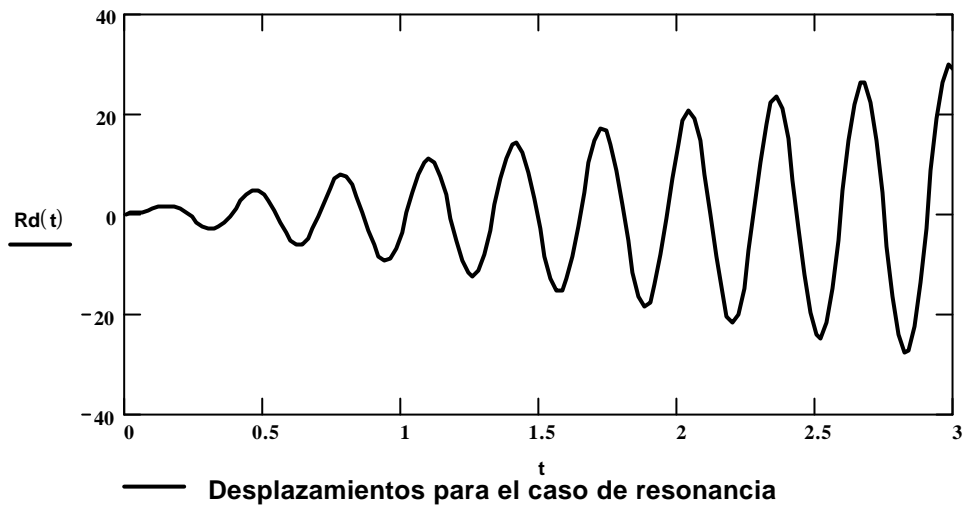
$$x(t) = \frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) - \frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot \omega_n \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \quad x(t) = \frac{P_o}{2 \cdot K} \cdot (\omega_n \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t) - \sin(\omega_n \cdot t))$$

Ahora calculamos el factor de amplificacion dinamica :

$$R_d = \frac{X_0}{X_{STo}} = -\frac{1}{2} \cdot (\omega_n \cdot t \cdot \cos(\omega_n \cdot t) - \sin(\omega_n \cdot t)) \quad R_d = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t\right) - \sin\left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t\right) \right)$$

$$T_n := \frac{2 \cdot p}{\omega n}$$

$$R_d(t) := -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t\right) - \sin\left(\frac{2 \cdot p}{T_n} \cdot t\right) \right)$$



$$x_{j+1} - x_j = \frac{X_{STo}}{2} \cdot (2 \cdot p \cdot (j + 1) - 2 \cdot p \cdot j) = \frac{p \cdot P_o}{K}$$

En cada ciclo la amplitud de la deformacion se

incrementa en $\frac{p \cdot P_o}{K}$