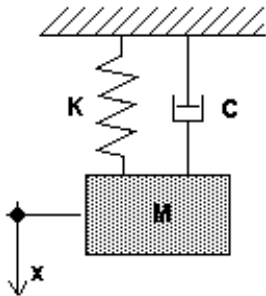


Vibraciones libres de sistemas amortiguados de un grado de libertad.

☞ Reference: C:\Ing\unidades.mcd

Partimos del análisis de la ecuación diferencial de equilibrio instantáneo que era :



$$M \cdot \left(\frac{d^2 x}{dt} \right) + C \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) + K \cdot x = P(t)$$

Si dividimos por la masa M resulta :

$$\frac{d^2 x}{dt} + \frac{C}{M} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{K}{M} \cdot x = \frac{1}{M} \cdot P(t)$$

Habíamos visto que en el modelo de vibraciones libres de 1 grado de libertad sin amortiguamiento, la **frecuencia natural de vibración** w_n del sistema era :

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{de lo cual resulta :} \quad \frac{K}{M} = (w_n)^2$$

La constante de amortiguamiento **C** es una medida de la energía disipada en un ciclo de vibración libre o en un ciclo de vibración armónica forzada. Definimos ahora la **constante crítica de amortiguamiento** C_c del sistema :

$$C_c = 2 \cdot M \cdot \sqrt{\frac{K}{M}} = 2 \cdot M \cdot w_n$$

Se llama constante crítica porque es el menor valor de **C** que inhibe completamente la oscilación

Y el **coeficiente de amortiguación** lo definimos como la relación :

$$x = \frac{C}{C_c}$$

Dicho coeficiente de amortiguación x es una propiedad del sistema y solo depende de la masa M y la rigidez K. De lo cual deducimos que :

$$C = C_c \cdot x = 2 \cdot M \cdot w_n \cdot x$$

Reemplazando en la ecuación diferencial nos queda :

$$\frac{d^2 x}{dt} + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) + (w_n)^2 \cdot x = \frac{1}{M} \cdot P(t)$$

Expresión de la ecuación diferencial de equilibrio para 1 grado de libertad.

Vamos a resolver la ecuación diferencial y planteamos la solución de la homogénea :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot \frac{dx}{dt} + (w_n)^2 \cdot x = 0$$

La solución de la homogénea la planteamos como : $x_H = e^{r \cdot t}$

y sus derivadas resultan : $\frac{d}{dt}x_H = r \cdot e^{r \cdot t}$ $\frac{d^2}{dt^2}x_H = r^2 \cdot e^{r \cdot t}$

Reemplazamos en la ecuación diferencial :

$$r^2 \cdot e^{r \cdot t} + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + (w_n)^2 \cdot e^{r \cdot t} = 0$$

$$e^{r \cdot t} \cdot [r^2 + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot r + (w_n)^2] = 0$$

$$r^2 + 2 \cdot x \cdot w_n \cdot r + (w_n)^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación característica : $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

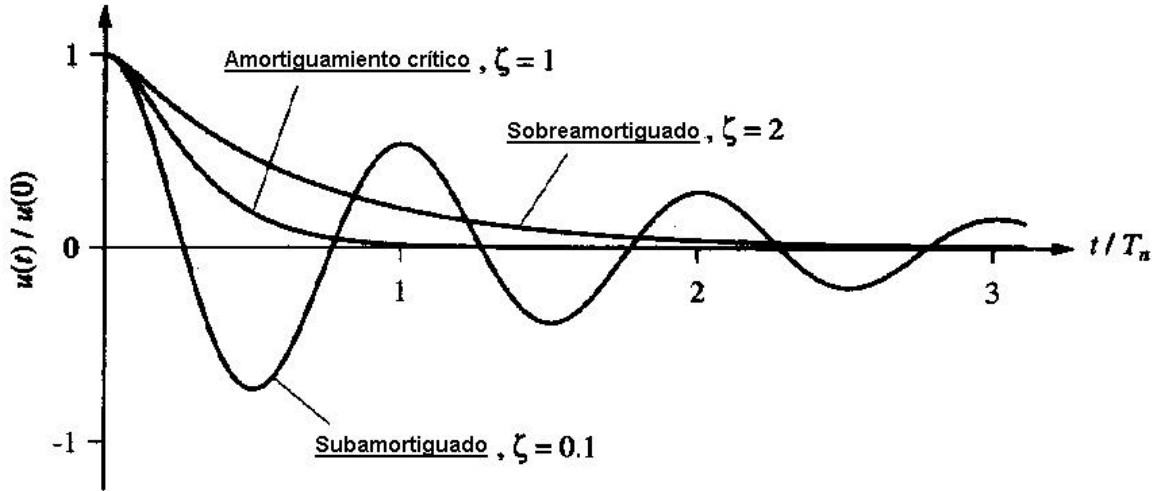
Las raíces de la ecuación resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(2 \cdot x \cdot w_n) + \sqrt{(2 \cdot x \cdot w_n)^2 - 4 \cdot (w_n)^2}}{2} \\ \frac{-(2 \cdot x \cdot w_n) - \sqrt{(2 \cdot x \cdot w_n)^2 - 4 \cdot (w_n)^2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_n \cdot (-x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ w_n \cdot (-x - \sqrt{x^2 - 1}) \end{pmatrix}$$

En consecuencia la solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de la forma :

$$x_H = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

La siguiente figura muestra una graficación del movimiento $u(t)$ a partir del desplazamiento inicial $u(0)$ para tres valores distintos del coeficiente de amortiguamiento x . Si resulta $C = C_{cr}$ ó $x = 1$, el sistema retorna a su posición de equilibrio sin oscilación. Si resulta $C > C_{cr}$ ó $x > 1$, otra vez el sistema no registra oscilamiento y retorna a su posición de equilibrio como en el caso anterior, pero mas despacio. Si resulta $C < C_{cr}$ ó $x < 1$, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio con una amplitud progresivamente decreciente.



Vibración de sistemas con amortiguamiento crítico, sobreamortiguados y subamortiguados

Como los coeficientes de amortiguamiento pueden ser menores o mayores que la unidad, esto hace que según el caso las raíces tengan parte real o parte imaginaria :

Para $x = 0$ las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \cdot (0 + i) \\ w_n \cdot (0 - i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \cdot i \\ w_n \cdot (-i) \end{bmatrix}$$

AMORTIGUACION NULA

Para $0 < x < 1$ las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_n \cdot x) + w_n \cdot i \cdot \sqrt{1 - x^2} \\ -(w_n \cdot x) - w_n \cdot i \cdot \sqrt{1 - x^2} \end{bmatrix}$$

AMORTIGUACION SUBCRITICA

Para $x = 1$ las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_n \\ -w_n \end{pmatrix}$$

AMORTIGUACION CRITICA

Para $x > 1$ las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_n \cdot x) + w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1} \\ -(w_n \cdot x) - w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1} \end{bmatrix}$$

AMORTIGUACION HIPERCITICA

Caso 1: Amortiguación nula :

Las raíces son :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \cdot i \\ w_n \cdot (-i) \end{bmatrix}$$

Es el caso de vibraciones libres sin amortiguamiento

La solución de la ecuación diferencial era :

$$x_H = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

La velocidad se obtiene derivando :

$$\frac{d x_H}{dt} = A \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Condiciones iniciales :

$$x_0 = x(0) \qquad \frac{d x_0}{dt} = \frac{d x(0)}{dt}$$

Reemplazando nos queda :

$$x(0) = A + B$$

$$v_0 = \frac{d x_0}{dt} \qquad \frac{d}{dt} x(0) = A \cdot r_1 + B \cdot r_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{d}{dt} x_0 \end{pmatrix}$$

La solución de la homogénea resulta :

$$x_H = \frac{r_2 \cdot x_0 - v_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_1 \cdot t} + \frac{-r_1 \cdot x_0 + v_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Reemplazando las raíces obtenidas en la solución de la homogénea nos queda :

$$x_H = \frac{-w_n \cdot i \cdot x_0 - v_0}{-2 \cdot w_n \cdot i} \cdot e^{w_n \cdot i \cdot t} + \frac{-w_n \cdot i \cdot x_0 + v_0}{-2 \cdot w_n \cdot i} \cdot e^{-w_n \cdot i \cdot t}$$

Teniendo en cuenta que : $\frac{1}{-i} = i$

$$x_H = \frac{w_n \cdot x_0 - v_0 \cdot i}{2 \cdot w_n} \cdot e^{w_n \cdot i \cdot t} + \frac{w_n \cdot x_0 + v_0 \cdot i}{2 \cdot w_n} \cdot e^{-w_n \cdot i \cdot t}$$

Teniendo en cuenta que :

$$\sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \qquad \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

$$x_H = \frac{x_0}{2} \cdot e^{w_n \cdot i \cdot t} - \frac{v_0 \cdot i}{2 \cdot w_n} \cdot e^{w_n \cdot i \cdot t} + \frac{x_0}{2} \cdot e^{-w_n \cdot i \cdot t} + \frac{v_0 \cdot i}{2 \cdot w_n} \cdot e^{-w_n \cdot i \cdot t}$$

$$x_H = \frac{x_0}{2} \cdot (e^{w_n \cdot i \cdot t} + e^{-w_n \cdot i \cdot t}) + \frac{v_0 \cdot i}{2 \cdot w_n} \cdot (e^{-w_n \cdot i \cdot t} - e^{w_n \cdot i \cdot t})$$

$$x_H = x_0 \cdot \cosh(w_n \cdot i \cdot t) + \frac{v_0 \cdot i}{w_n} \cdot \sinh(-w_n \cdot i \cdot t)$$

Teniendo en cuenta que :

$$\cosh(i \cdot a) = \cos(a)$$

$$\sinh(i \cdot a) = i \cdot \sin(a)$$

$$x_H = x_0 \cdot \cos(w_n \cdot t) + \frac{v_0 \cdot i}{w_n} \cdot i \cdot \sin(-w_n \cdot t)$$

Teniendo en cuenta que : $i^2 = -1$

$$-\sin(-a) = \sin(a)$$

$$x_H = x_0 \cdot \cos(w_n \cdot t) + \frac{v_0}{w_n} \cdot \sin(w_n \cdot t)$$

Se demuestra así que es el caso de vibraciones libres sin amortiguamiento

Caso 2) Amortiguación subcrítica : $0 < \alpha < 1$ $0 < C < C_C$

El caso de amortiguación subcrítica se da en estructuras de edificios, puentes, presas, estructuras offshore, etc. todas entran en esta categoría porque su coeficiente de amortiguamiento ξ es siempre menor que 0.10

Las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_n \cdot \alpha) + w_n \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot i \\ -(w_n \cdot \alpha) - w_n \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \cdot (-\alpha + i \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}) \\ w_n \cdot (-\alpha - i \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}) \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación diferencial era :

$$x_H = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Derivando obtenemos :

$$\frac{d x_H}{dt} = A \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

La velocidad se obtiene derivando :

Condiciones iniciales : $x_0 = x(0)$ $\frac{d x_0}{dt} = \frac{d x(0)}{dt}$

Reemplazando nos queda :

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B \\ \frac{d}{dt}x(0) &= A \cdot r_1 + B \cdot r_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{d}{dt}x_0 \end{pmatrix}$$

Llamemos : $v_0 = \frac{d x_0}{dt}$

La solución de la homogénea resulta :

$$x_H = \frac{r_2 \cdot x_0 - v_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_1 \cdot t} + \frac{-r_1 \cdot x_0 + v_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

$$x_H = \frac{w_n \cdot (-x - i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot x_0 - v_0}{-2 \cdot w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot e^{w_n \cdot (-x+i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t} + \frac{-[w_n \cdot (-x + i \cdot \sqrt{1-x^2})] \cdot x_0 + v_0}{-2 \cdot w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot e^{w_n \cdot (-x-i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t}$$

$$x_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_n \cdot x_0 \cdot x + w_n \cdot x_0 \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} + v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot [e^{w_n \cdot (-x+i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t} - e^{w_n \cdot (-x-i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t}]$$

$$x_H = \left[\frac{x_0 \cdot (x + i \cdot \sqrt{1-x^2})}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot \frac{e^{w_n \cdot (-x+i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t} - e^{w_n \cdot (-x-i \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot t}}{2}$$

$$x_H = \left[\frac{x_0 \cdot (x + i \cdot \sqrt{1-x^2})}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot \frac{e^{-w_n \cdot x \cdot t + w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t} - e^{-w_n \cdot x \cdot t - w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t}}{2}$$

Teniendo en cuenta que : $e^{a+b} = e^a + e^b$

$$x_H = \left[\frac{x_0 \cdot (x + i \cdot \sqrt{1-x^2})}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot \frac{e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot e^{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t} - e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot e^{-w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t}}{2}$$

$$x_H = \left[\frac{x_0 \cdot (x + i \cdot \sqrt{1-x^2})}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t} - e^{-w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t}}{2} \right)$$

Teniendo en cuenta las relaciones : $\sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ $\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$

$$x_H = \left[\frac{x_0 \cdot (x + i \cdot \sqrt{1-x^2})}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \sinh(w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t)$$

$$x_H = \left[x_0 \cdot \left(\frac{x}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} + 1 \right) + \frac{v_0}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \sinh(w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t)$$

Desarrollando la expresion nos queda :

$$x_H = x_0 \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{x}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} \right) \cdot \sinh(w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t) + \frac{v_0 \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t}}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sinh(w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot t)$$

$$x_H = x_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \left(\cosh(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) + \frac{x}{i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sinh(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) \right) + \frac{v_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t}}{w_n \cdot i \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sinh(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t)$$

En este caso de raices imaginarias, las frecuencias hiperbólicas se transforman en circulares :

es decir : $\cosh(i \cdot a) = \cos(a)$

$\sinh(i \cdot a) = i \cdot \sin(a)$

$$\cosh(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) = \cos(\sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t)$$

$$\sinh(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) = i \cdot \sin(i \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t)$$

$$x_H = x_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t) \right) + \frac{v_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t}}{w_n \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-x^2} \cdot w_n \cdot t)$$

Si llamamos :

$$w_r = \sqrt{1-x^2} \cdot w_n$$

Frecuencia natural del sistema amortiguado

La solución de la ecuación diferencial nos queda :

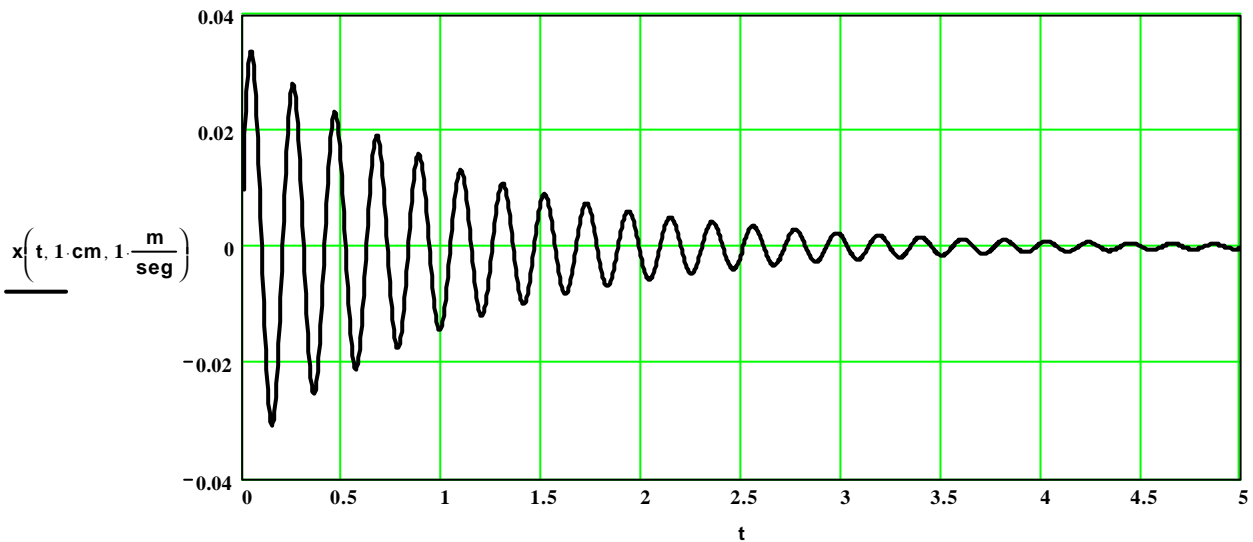
$$x_H = x_0 \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_r \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t) \right) + \frac{V_0}{\omega_r} \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t)$$

Graficacion de la respuesta :

Datos : $\omega_n := 30 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ $x := 0.03$

Iteración : $t := 0, 0.005 .. 5 \cdot \text{seg}$

$$x(t, x_0, V_0) := x_0 \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\sqrt{1-x^2} \cdot \omega_n \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \text{sen}(\sqrt{1-x^2} \cdot \omega_n \cdot t) \right) + \frac{V_0 \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t}}{\omega_n \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \text{sen}(\sqrt{1-x^2} \cdot \omega_n \cdot t)$$



Alternativamente puede escribirse :

$$x_H = e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_r \cdot t) + \frac{V_0 + x_0 \cdot x \cdot \omega_n}{\omega_r} \cdot \text{sen}(\omega_r \cdot t) \right)$$

$$x_H = C \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \cos(\omega_r \cdot t - a)$$

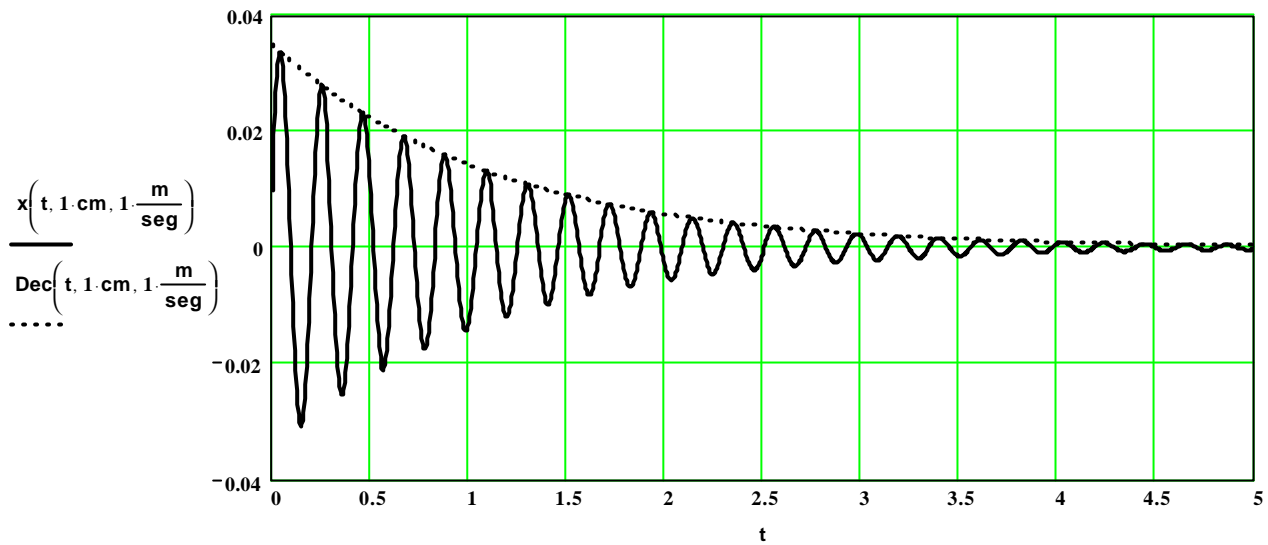
Donde la amplitud del movimiento es :

$$C(t) = \sqrt{(x_0)^2 + \frac{(V_0 + x_0 \cdot x \cdot \omega_n)^2}{(\omega_r)^2}}$$

$$\tan(a) = \frac{V_0 + x_0 \cdot x \cdot \omega_n}{\omega_r \cdot x_0}$$

La curva del decremento logarítmico la expresamos :

$$\text{Dec}(t, x_0, V_0) := \sqrt{(x_0)^2 + \frac{(V_0 + x_0 \cdot x \cdot \omega_n)^2}{(\omega_r)^2}} \cdot e^{-x \cdot \omega_n \cdot t}$$



El movimiento es oscilatorio pero no es periodico. La amplitud de vibracion no se mantiene constante durante el movimiento, sino que decrece en ciclos sucesivos. No obstante las oscilaciones ocurren en intervalos iguales de tiempo. Dicho intervalo es el periodo de vibracion con amortiguamiento :

$$T_r = \frac{2 \cdot p}{w_r} = \frac{2 \cdot p}{w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

En estructuras reales, el coeficiente de amortiguamiento C es considerablemente menor que el critico :

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}} = \text{de 2 a 20\%}$$

Tomando el maximo $\xi = 20\%$ resulta que :

$$w_r = w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 0.98 \cdot w_n$$

Se deduce que la frecuencia ω_r de un sistema amortiguado es casi igual a la del sistema sin amortiguamiento ω_n . Por eso la frecuencia natural de un sistema amortiguado se considera igual a la frecuencia de un sistema sin amortiguacion. (Valido para $0 < \xi < 20\%$)

Caso 3) Amortiguación crítica : $\alpha = 1 \quad C = C_C \quad \alpha^2 - 1 = 0$

Asumiendo que el movimiento con amortiguación crítica es un caso límite del movimiento con amortiguación subcrítica, partimos el análisis de la misma expresión de amortiguamiento subcrítico :

$$x_H = x_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(\cos(\sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \omega_n \cdot t) + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot \text{sen}(\sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \omega_n \cdot t) \right) + \frac{v_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \omega_n \cdot t}}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot \text{sen}(\sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \omega_n \cdot t)$$

Planteamos lo siguiente :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \omega_n \cdot t)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) = \omega_n \cdot t \quad \cos(\sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \omega_n \cdot t) = 1$$

Reemplazando en la ecuación nos queda :

$$x_H = x_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t) + \frac{v_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t}}{\omega_n} \cdot \omega_n \cdot t$$

Entonces la solución de la ecuación nos queda :

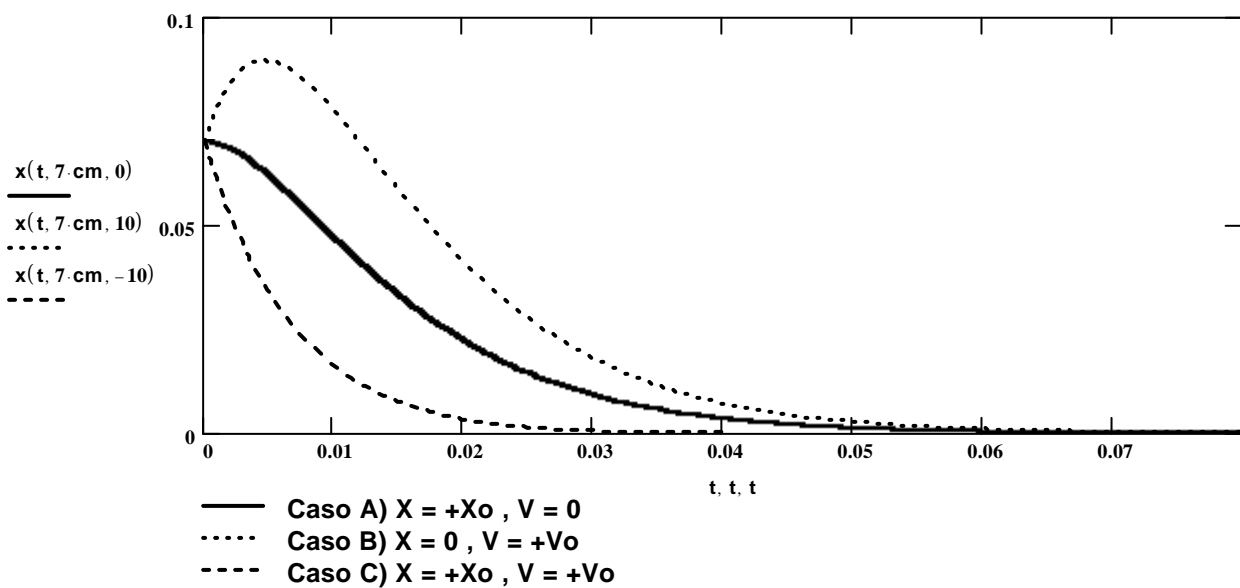
$$x_H = x_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t) + v_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot t$$

Y graficamos al respuesta con los siguientes datos :

Datos : $\omega_n := 117.97084386$

iteración : $t := 0, 0.0005 \dots 1$

$$x(t, x_0, v_0) := x_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t) + v_0 \cdot e^{-\omega_n \cdot t} \cdot t$$



La forma de la curva que expresa el movimiento $x(t)$ depende de la posición inicial X_0 y la velocidad inicial V_0 y sus signos. Se ilustran los siguientes casos :

A) Para $t = 0$, $X = +X_0$, $V = 0$: La curva arrancara de X_0 con tangente horizontal.

B) Para $t = 0$, $X = X_0$, $V = +V_0$: La curva arrancara de X_0 , con pendiente positiva, es decir, aumenta X hasta un valor máximo y luego disminuye asintóticamente.

C) Para $t = 0$, $X = X_0$, $V = -V_0$: La curva arrancara de X_0 , y su tangente es negativa.

Con la amortiguación crítica, el sistema se recupera (es decir, la masa vuelve a su posición de equilibrio) en tiempo mínimo sin que se produzca oscilación.

En los sistemas en que se desea una rápida recuperación sin oscilaciones, conviene un amortiguador de constante algo superior a la crítica. Tal es el caso de un lanzador de proyectiles. En el caso de un automóvil, lo indicado es un amortiguador algo inferior a la crítica, para una rápida recuperación compatible con una adecuada "dureza" del amortiguador.

Caso 4) Amortiguación hiper crítica : $\zeta > 1$ $C > C_c$

El amortiguador presente en el sistema es más "duro" que el amortiguador de constante crítica, es decir, que a igual velocidad relativa entre los extremos la fuerza opuesta es menor.

Las raíces resultan :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(w_n \cdot \zeta) + w_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ -(w_n \cdot \zeta) - w_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_n \cdot (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ w_n \cdot (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación diferencial era : $x_H = A \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot e^{r_2 \cdot t}$

La velocidad se obtiene derivando : $\frac{d x_H}{dt} = A \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + B \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$

Condiciones iniciales : $x_0 = x(0)$ $\frac{d x_0}{dt} = \frac{d x(0)}{dt}$

Reemplazando nos queda : $x(0) = A + B$
 $\frac{d}{dt}x(0) = A \cdot r_1 + B \cdot r_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{d}{dt}x_0 \end{pmatrix}$

Llamemos : $v_0 = \frac{d x_0}{dt}$

La solución de la homogénea resulta :

$$x_H = \frac{r_2 \cdot X_0 - V_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_1 \cdot t} + \frac{-r_1 \cdot X_0 + V_0}{r_2 - r_1} \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

$$x_H = \frac{w_n \cdot (-x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot X_0 - V_0}{-2 \cdot w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot e^{w_n \cdot (-x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t} + \frac{-[w_n \cdot (-x + \sqrt{x^2 - 1})] \cdot X_0 + V_0}{-2 \cdot w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot e^{w_n \cdot (-x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t}$$

$$x_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_n \cdot X_0 \cdot x + w_n \cdot X_0 \cdot \sqrt{x^2 - 1} + V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot [e^{-w_n \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t} - e^{-w_n \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t}]$$

$$x_H = \left[\frac{X_0 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] \cdot \frac{[e^{-w_n \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t} - e^{-w_n \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot t}]}{2}$$

$$x_H = \left[\frac{X_0 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] \cdot \frac{[e^{(-w_n \cdot x \cdot t + w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1})} - e^{(-w_n \cdot t \cdot x - w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1})}]}{2}$$

Teniendo en cuenta que : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$$x_H = \left[\frac{X_0 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] \cdot \frac{(e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot e^{w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1}} - e^{-w_n \cdot t \cdot x} \cdot e^{-w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1}})}{2}$$

$$x_H = \left[\frac{X_0 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1}} - e^{-w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1}}}{2} \right)$$

Teniendo en cuenta las relaciones :

$$\sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

$$x_H = \left[\frac{X_0 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{V_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \sinh(w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1})$$

$$x_H = \left[x_0 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \right) + \frac{v_0}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \right] e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \sinh(w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1})$$

$$x_H = x_0 \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \cdot \sinh(w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{v_0 \cdot e^{-w_n \cdot x \cdot t}}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(w_n \cdot t \cdot \sqrt{x^2 - 1})$$

La respuesta del sistema amortiguado vibrando sin excitación resulta :

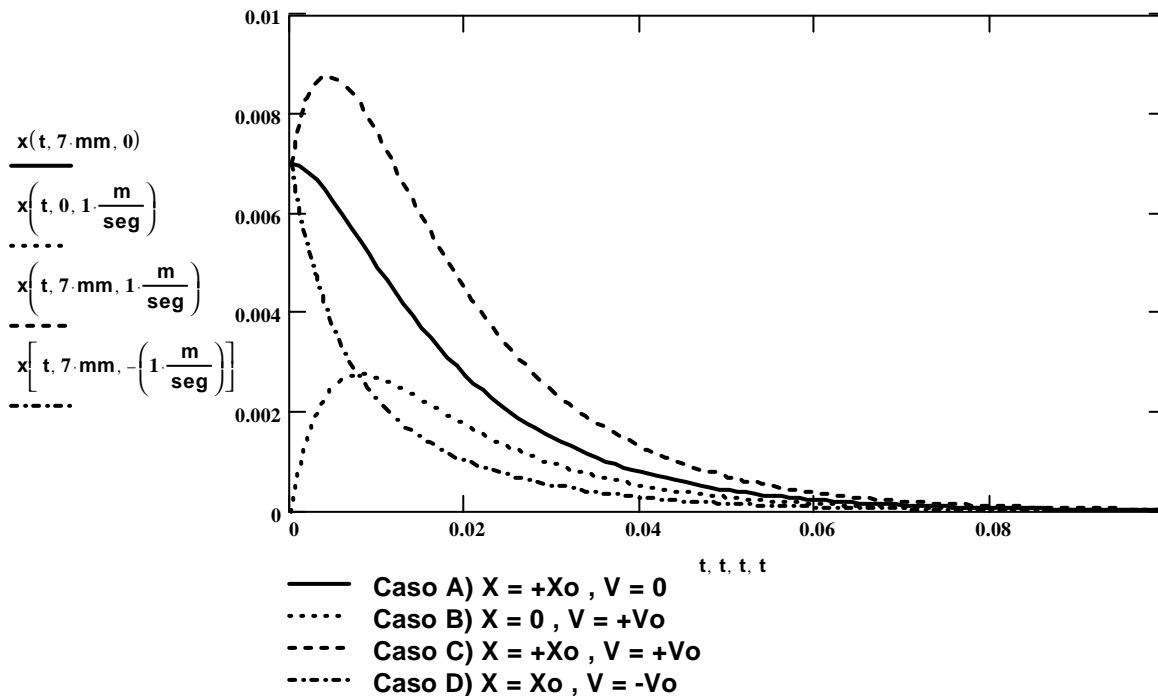
$$x_H = x_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \left(\cosh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t) \right) + \frac{v_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t}}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t)$$

Graficacion de la respuesta :

Datos : $w_n := 117.97084386 \cdot \frac{1}{\text{seg}}$ $x := 1.2$

iteración : $t := 0, 0.001 .. 0.1 \text{ seg}$

$$x(t, x_0, v_0) := x_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t} \cdot \left(\cosh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t) + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t) \right) + \frac{v_0 \cdot e^{-x \cdot w_n \cdot t}}{w_n \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{x^2 - 1} \cdot w_n \cdot t)$$



La forma de la curva que expresa el movimiento $x(t)$ depende de la posición inicial X_0 y la velocidad inicial V_0 y sus signos. Se ilustran los siguientes casos :

A) Para $t = 0$, $X = +X_0$, $V = 0$: La curva arrancara de X_0 a tangente horizontal.

B) Para $t = 0$, $X = 0$, $V = +V_0$: La curva arrancara de cero, crecera hasta un valor maximo y luego decrecera en forma asintotica.

C) Para $t = 0$, $X = X_0$, $V = +V_0$: La curva arrancara de X_0 , crecera hasta un maximo y luego decrecera en forma asintotica.

D) Para $t = 0$, $X = +X_0$, $V = -V_0$: La curva arranca de X_0 con pendiente negativa y decrece asintoticamente.

En el movimiento con amortiguacion hipercritica, una vez apartada la masa de su posición de equilibrio, el retorno a la misma se produce sin que haya movimiento oscilatorio. El apartamiento de la posición de equilibrio disminuye segun una ley exponencial, mas rapido al principio y mas lentamente al final. Cuanto mayor es ξ (cuanto mas duro es el amortiguador), mas tarda la masa en alcanzar la posición de equilibrio.