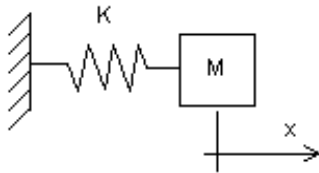


## Vibraciones libres no amortiguadas de sistemas de un grado de libertad.

Sea una masa que desliza sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Los corrimientos  $x$  se miden a partir de la posición en que el resorte no está deformado.



### Supuestos :

- Masa del resorte es despreciable.
- Masa de resorte despreciable
- No hay amortiguamiento. ( $c = 0$ )
- No hay fuerzas perturbadoras exteriores
- Se desliza sin rozamiento.

La ecuación diferencial del movimiento resulta :

$$M \cdot \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + K \cdot x = 0$$

Esta ecuación diferencial se clasifica como **lineal y de segundo orden**. El hecho de que los coeficientes  $M$  y  $K$  sean constantes, y que el segundo miembro sea cero, clasifica a esta ecuación como **homogénea con coeficientes constantes**.

Supongamos que el movimiento responde a una ley senoidal (vibraciones periódicas armónicas)

$$\text{proponemos : } \quad x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\text{o también } \quad x = B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes que dependen de la iniciación del movimiento, mientras que  $\omega$  es un valor que denota una propiedad física del sistema. Reemplazamos la expresión anterior en la ecuación general del movimiento y nos queda :

$$M \cdot \left[ \frac{d^2 (A \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt^2} \right] + K \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$$

$$(K - M \cdot \omega^2) \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0$$

Para que esta ecuación se satisfaga se debe cumplir que :

$$K - m \cdot \omega^2 = 0$$

Entonces despejando resulta :

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad w_n = \text{pulsación o frecuencia natural circular}$$

Debido a que  $x = A \cdot \cos(w_n \cdot t)$  y  $x = B \cdot \sin(w_n \cdot t)$  son soluciones de la ecuación diferencial, y además esta es lineal, entonces la superposición de estas dos soluciones es también una solución. Más aún teniendo dos constantes de integración A y B, es de hecho la solución general para esta ecuación diferencial de segundo orden.

$$x = A \cdot \cos(w_n \cdot t) + B \cdot \sin(w_n \cdot t)$$

Derivando, la velocidad resulta :

$$\frac{dx}{dt} = -A \cdot w_n \cdot \sin(w_n \cdot t) + B \cdot w_n \cdot \cos(w_n \cdot t)$$

Las constantes A y B están determinadas por las condiciones iniciales del movimiento del sistema, que casi invariablemente son el desplazamiento  $x_0$  y la velocidad  $v_0$  al iniciarse el movimiento en el instante  $t_0$ . La vibración libre se inicia apartando el sistema de su posición de equilibrio estático, dándole a la masa un desplazamiento inicial  $x_0$  y velocidad inicial  $v_0$ .

Sustituyendo  $t = 0$  ,  $x = x_0$  y  $\frac{dx}{dt} = v_0$  en las ecuaciones anteriores obtenemos :

$$x_0 = A$$

$$v_0 = B \cdot w_n$$

Aplicando  $x_0$  y  $v_0$  en la ecuación  $x = A \cdot \cos(w_n \cdot t) + B \cdot \sin(w_n \cdot t)$  nos queda :

$$x = x_0 \cdot \cos(w_n \cdot t) + \frac{v_0}{w_n} \cdot \sin(w_n \cdot t) \quad (1)$$

Expresión del desplazamiento  $x$  del oscilador simple en función del tiempo. El movimiento descrito por esta ecuación es **armónico** y por lo tanto **periódico** ; puede ser expresado por una función seno o coseno de la misma frecuencia  $\omega$ .

El período **T**, es el tiempo que tarda el vector giratorio en dar una vuelta ( $2\pi$  radianes) a una velocidad angular  $\omega$ . El período puede ser fácilmente calculado ya que las funciones seno y coseno tienen un período de  $2\pi$ . Se expresa en segundos, entendiéndose tácitamente que se trata de segundos por ciclo.

Luego :

$$\omega_n \cdot T = 2 \cdot p$$

$$T = \frac{2 \cdot p}{\omega_n}$$

$$T = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$$

La cantidad de vueltas que da el vector en un segundo es igual a la cantidad de ondas en igual lapso. Esta magnitud es recíproca del período y es la **frecuencia natural cíclica f**.

$$f_n = \frac{1}{T}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2 \cdot p}$$

entonces

$$\omega_n = 2 \cdot p \cdot f_n$$

Las propiedades naturales de vibración  $\omega_n$ ,  $T_n$  u  $f_n$  dependen solo de la masa y de la rigidez del sistema. De dos sistemas que tengan igual masa, el que sea más rígido, tendrá mayor frecuencia natural y menor período. A la vez, de dos sistemas que tengan la misma rigidez, el que tenga más masa tendrá menor frecuencia natural de vibración y período más largo. Como los sistemas son lineales, estas propiedades de vibración son independientes del desplazamiento y velocidad inicial.

La frecuencia natural circular  $\omega_n$ , la frecuencia natural cíclica  $f_n$ , y el período natural  $T_n$  pueden ser expresados en forma alternativa como sigue

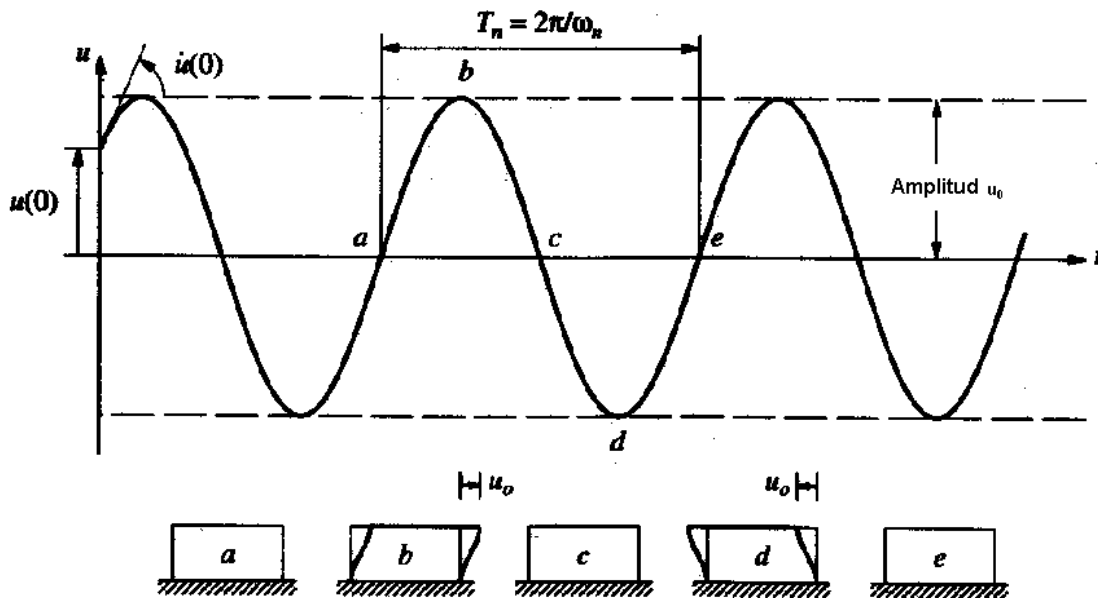
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{d_{ST}}}$$

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot \sqrt{\frac{g}{d_{ST}}}$$

$$T_n = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{d_{ST}}{g}}$$

$$d_{ST} = \frac{m \cdot g}{k}$$

Donde  $d_{ST}$  es la deformación estática de la masa  $M$  suspendida de un resorte con rigidez  $K$ , y  $g$  es la aceleración de la gravedad



Vibración libre de un sistema de 1GL sin amortiguamiento

La porción delimitada por **a-b-c-d-e** de la curva de desplazamientos en función del tiempo describe un ciclo de la vibración libre del sistema. Desde su posición de equilibrio estático en "a", la masa se mueve a la derecha alcanzando su máximo desplazamiento positivo  $u_0$  en el punto "b". en dicho punto la velocidad es cero y el desplazamiento empieza a decrecer y la masa retorna a su posición de equilibrio "c" donde la velocidad es máxima, y la masa sigue esta vez hacia la izquierda, y repitiendo el ciclo otra vez hasta llegar al punto "e". Al tiempo "e" la velocidad y desplazamiento de la masa es idéntica a la que tenía en el instante "a", y así sucesivamente se repite el ciclo.

La ecuación (1) muestra que el movimiento oscilatorio se repite en intervalos de  $\frac{2 \cdot p}{w_n}$  segundos.

En particular la velocidad y el desplazamiento de la masa en dos instantes  $t_1$  y  $t_1 + \frac{2 \cdot p}{w}$  es idéntico.

$$u(t_1) = u\left(t_1 + \frac{2 \cdot p}{w_n}\right)$$

$$\frac{du(t_1)}{dt} = \frac{d}{dt}u\left(t_1 + \frac{2 \cdot p}{w_n}\right)$$

**Amplitud del movimiento :**

Observando la ecuación (1) mediante una simple transformación trigonométrica podemos escribir

$$x = C \cdot \sin(w \cdot t + a)$$

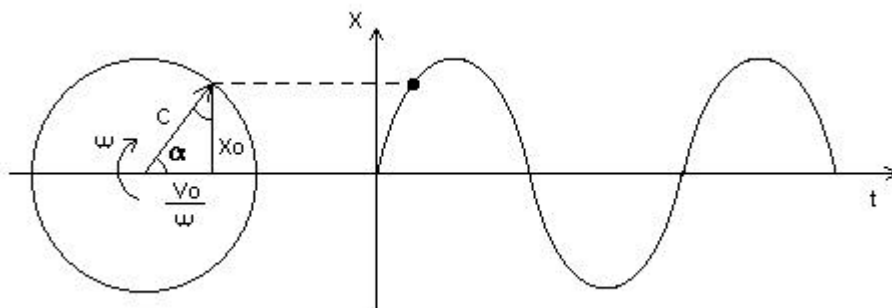
$$x = C \cdot \cos(w \cdot t - b)$$

Donde :

$$C = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2}$$

$$\tan(a) = \frac{x_0}{\left(\frac{v_0}{w}\right)} \quad \text{y} \quad \tan(b) = \frac{v_0}{x}$$

El valor de **C** se conoce como **amplitud** o desplazamiento máximo del movimiento y el ángulo **a** o **b** como **ángulo de fase**.



La amplitud **C** depende del desplazamiento y velocidad inicial. Ciclo tras ciclo permanece igual y el movimiento no decae porque no hay amortiguamiento en este caso. Esto no ocurre en la realidad.

Para el caso de un pórtico de un solo nivel, con masa concentrada  $m$  y columnas empotradas en su base, la frecuencia natural de vibración resulta

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

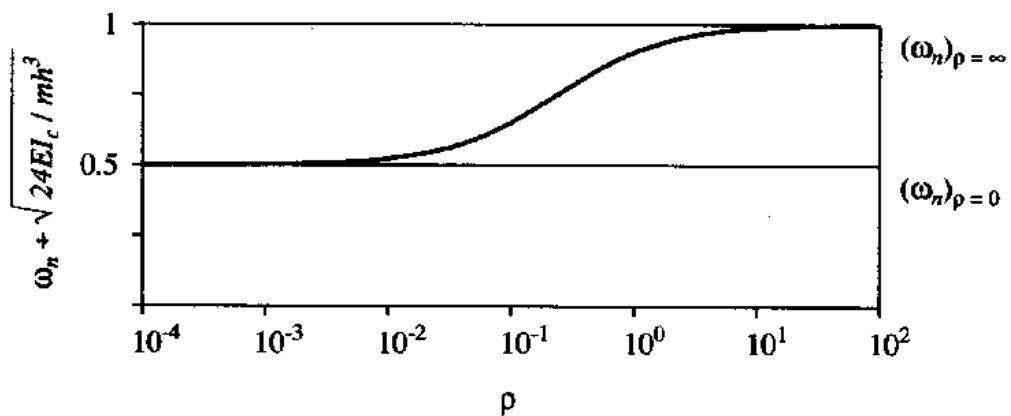
$$k = \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{h^3} \cdot \frac{12 \cdot r + 1}{12 \cdot r + 4} \quad k = \text{rigidez lateral del pórtico}$$

$$r = \frac{I_b}{4 \cdot I_c} \quad r = \text{relación de rigideces}$$

La frecuencia natural circular, para los dos casos extremos de  $r = 0$ , y  $r = \infty$  resulta

$$(w_n)_{r=\infty} = \sqrt{\frac{24 \cdot E \cdot I_c}{M \cdot h^3}}$$

$$(w_n)_{r=0} = \sqrt{\frac{6 \cdot E \cdot I_c}{M \cdot h^3}}$$



Variación de la frecuencia natural respecto de la relación de rigideces.

